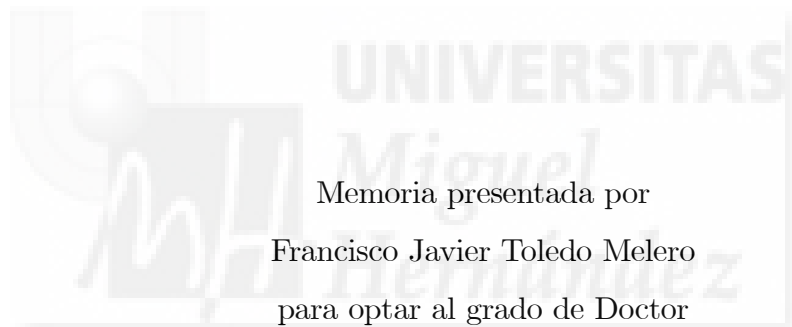


Distancia al Mal Planteamiento en Optimización Lineal



Memoria presentada por

Francisco Javier Toledo Melero

para optar al grado de Doctor

por la Universidad Miguel Hernández de Elche,

realizada bajo la dirección de los doctores

D. Marco Antonio López Cerdá

Dña. María Josefa Cánovas Cánovas

D. Juan Parra López.

Elche, 2003

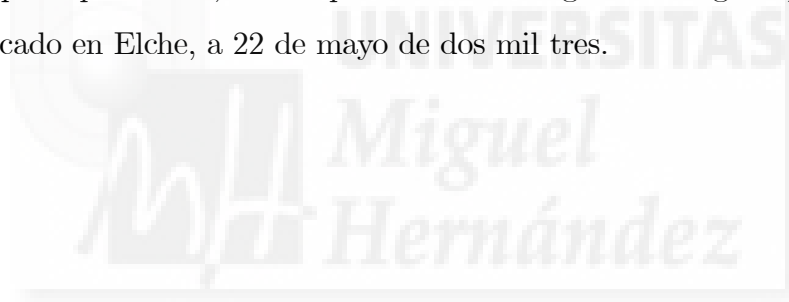
D. MARCO ANTONIO LÓPEZ CERDÁ, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante,

Dña. MARÍA JOSEFA CÁNOVAS CÁNOVAS, Profesora Titular de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Miguel Hernández de Elche, y

D. JUAN PARRA LÓPEZ, Profesor Titular de Matemática Aplicada de la Universidad Miguel Hernández de Elche,

CERTIFICAN: Que la presente memoria, **Distancia al Mal Planteamiento en Optimización Lineal**, ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Estadística y Matemática Aplicada de la Universidad Miguel Hernández de Elche, por D. Francisco Javier Toledo Melero, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor por la Universidad Miguel Hernández de Elche.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente certificado en Elche, a 22 de mayo de dos mil tres.



Fdo.: Marco Antonio López Cerdá

Fdo.: María Josefa Cánovas Cánovas

Fdo.: Juan Parra López

D. JOSÉ LUIS RUIZ GÓMEZ, Profesor Titular de Universidad y Director del Departamento de Estadística y Matemática Aplicada de la Universidad Miguel Hernández de Elche,

INFORMA: Que da su conformidad para la defensa pública de la tesis doctoral presentada por D. Francisco Javier Toledo Melero, que lleva el título “Distancia al Mal Planteamiento en Optimización Lineal”.

Y para que conste a los efectos oportunos, emite el presente informe en Elche, a 22 de mayo de dos mil tres.



Fdo.: José Luis Ruiz Gómez
Director del Departamento.

A Mónica



A mis padres, Julián y Feliciano

En las siguientes líneas me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han hecho posible este momento tan especial de mi vida.

En primer lugar quiero dar las gracias más efusivas a mis directores, Marco, Lola y Juan, por todo lo que me han enseñado, compartiendo conmigo sus conocimientos, sus ideas, su rigurosidad, su elegancia y en definitiva, su amor por las Matemáticas. También quiero darles las gracias por todo el tiempo que me han dedicado, en muchas ocasiones sacrificándolo de su propio tiempo personal; aprovecho este momento para dar las gracias a María Pilar por su benevolencia y comprensión en tantas de esas ocasiones. Tengo que agradecerles también a Marco, a Juan y a Lola, la paciencia que tuvieron conmigo cuando empecé en un campo que era desconocido para mí, gracias por creer en mí. Me llevaron de la mano y me enseñaron a andar, espero aprender mucho más. Quiero asimismo agradecerles su apoyo incondicional desde que llegué a la Universidad Miguel Hernández. Su complicidad, su discreción y sus consejos me han ayudado en gran medida, gracias también por estar ahí. Por último, quiero destacar la gran calidad humana que han demostrado siempre, es un verdadero privilegio estar junto a ellos. Marco, Lola y Juan, gracias por todo de corazón.

Cuando conocí a Mónica mi vida cambió, muy probablemente no estaría aquí sin ella, gracias Cariño por estar a mi lado. Gracias por tu enorme comprensión, por tu gran apoyo y por tu infinito amor.

Quiero agradecer a mi familia todo el apoyo que siempre me ha brindado, a mis padres, Julián y Feliciano, que siempre han confiado en mí, a ellos les debo todo lo que soy; a mi hermano Jose, que ha sido mi referente, me ha prestado su ayuda incondicional y me ha aconsejado siempre que lo he necesitado, y a Nati por su complicidad, a Alba y a Hugo; a mi hermana María José y a Ricardo por su respeto y su estima; y también a Monique por su generosidad y su bondad.

Agradezco a los compañeros y amigos el afecto y las atenciones que me han dedicado; a Fernando y a José Vicente por su confianza y su apoyo; a Toni, Xaro, Ana, y tantos otros, por su compañerismo; a mis amigos de la carrera, Francisco, Juanfran, Manolo, Melenas, Vicent, David y Olegario, por esos años inolvidables; a mis amigos de la Universidad del País Vasco, Marta, Raúl y José Ignacio, por su hospitalidad y su inestimable respaldo. Hago extensivo este agradecimiento a mis amigos de siempre, Josep Antoni, Ernesto, Jose,..., a los que no he podido atender como hubiese querido durante todos estos años de estudio, gracias por seguir ahí.

Índice General

Introducción	1
0 Preliminares	15
0.1 Notación y definiciones	15
0.1.1 El espacio paramétrico de los sistemas de desigualdades lineales	16
0.1.2 El espacio paramétrico de los problemas de optimización lineal	18
0.2 Herramientas básicas del Análisis Convexo	18
0.3 Resultados preliminares acerca de sistemas de desigualdades lineales	24
0.4 Resultados preliminares acerca de problemas de optimización lineal	27
1 Medidas del mal planteamiento relativo a la consistencia de un sistema de desigualdades lineales	29
1.1 Introducción	29
1.2 Caracterización del mal planteamiento generalizado	32
1.3 Distancia al mal planteamiento generalizado	43
1.4 Valor de consistencia	51
1.5 Sistemas lineales cónicos en el caso finito	57
2 Medidas del mal planteamiento relativo a la resolubilidad de un problema de optimización lineal	59
2.1 Introducción	59
2.2 Problemas mal planteados	62

2.2.1	Concepto de mal planteamiento	62
2.2.2	Caracterización de los problemas mal planteados en el interior del conjunto de los problemas consistentes	64
2.2.3	Caracterización de los problemas mal planteados en la fron- tera del conjunto de los problemas consistentes	66
2.3	Distancia al conjunto de los problemas mal planteados	83
2.3.1	Distancia desde $cl(\Pi_s)$	84
2.3.2	Distancia desde $ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$	89
2.3.3	Distancia desde $int(\Pi_i)$	95
3	Aplicaciones de la distancia al mal planteamiento	99
3.1	Introducción	99
3.2	Estabilidad del conjunto factible: lipschitzianidad y regularidad . .	102
3.3	Complejidad del algoritmo del elipsoide	112
3.4	Acotación del conjunto factible y del conjunto óptimo	117
3.5	Lipschitzianidad del valor óptimo	125
3.6	Análisis primal-dual de la estabilidad	127
3.6.1	Medidas del mal planteamiento relativo a la consistencia del problema dual.	130
3.6.2	Medidas del mal planteamiento relativo a la consistencia de los problemas primal y dual.	133
3.6.3	Estudio de la estabilidad cuando las perturbaciones recaen sobre el término independiente	137
	Bibliografía	148
	Símbolos y abreviaturas	154
	Índice alfabético	158

Introducción

El objetivo de esta memoria es el estudio de la estabilidad, desde un punto de vista cuantitativo, de un problema de optimización en el contexto de la Programación Lineal (PL) ordinaria y semi-infinita.

Un problema de Programación Semi-Infinita (PSI) es un problema de optimización en el que bien el número de variables o bien el número de restricciones es finito. Por su parte, la Programación Lineal Semi-Infinita (PLSI), que aparece como área activa de investigación a principios de los años 60 en una serie de artículos debidos a Charnes, Cooper y Kortanek, se ocupa del estudio de problemas de PSI con función objetivo y con restricciones lineales, por lo que puede considerarse una extensión de la PL ordinaria.

En esta memoria se analizan diferentes medidas cuantitativas de la estabilidad de un problema π de PLSI en un contexto general en que, si bien el número de variables, n , es finito, no se requiere ninguna hipótesis sobre el conjunto de índices T del sistema de restricciones asociado a π . Así, las *funciones de coeficientes* que a cada índice $t \in T$ le hacen corresponder el vector de coeficientes, $a_t \in \mathbb{R}^n$, y el término independiente, $b_t \in \mathbb{R}$, de la correspondiente restricción no gozan de ninguna propiedad en particular. En la sección 3.6 realizaremos una breve incursión en la estabilidad del problema dual, en el sentido de Haar, de π (en el que el número de restricciones es finito y el de variables es arbitrario, en la medida en que lo es T).

El texto de Goberna y López [21] presenta una amplia revisión de los principales tópicos de la PLSI en el contexto general (T arbitrario) al que nos referíamos

anteriormente. Por otra parte, el texto de Reemtsen y Rückmann [43] presenta una colección de artículos sobre PSI, proporcionando una perspectiva general sobre las actuales líneas de investigación en este campo.

Los problemas de PLSI aparecen de forma natural en diferentes áreas, por ejemplo, en aproximación funcional, en estimación de parámetros, en análisis numérico, etc. (véase [21] para una descripción más detallada de diferentes aplicaciones y de numerosas referencias en esta línea como, por ejemplo, Hettich y Kortanek [26]). Otra posible aplicación de la PLSI proviene del campo de la Programación No-Linear, cuando se considera una reformulación adecuada del dual lagrangiano del problema en cuestión (véase, por ejemplo, Bazaraa *et al.* [2] y Cánovas *et al.* [8]).

Existen en la literatura numerosas contribuciones a la teoría de la estabilidad de problemas de PLSI y sus sistemas de restricciones asociados en otros contextos estructuralmente más ricos que el contexto general (T arbitrario) antes descrito. Encontramos un antecedente inmediato en el *caso continuo*, donde T es un conjunto compacto de Hausdorff y los coeficientes de las restricciones dependen continuamente del índice (i.e., las funciones de coeficientes son continuas). En este contexto se sitúan los trabajos de Brosowski ([4] y [5]) y Fischer [17]. Trabajos como los de Jongen, Twilt y Weber [32] y Jiménez y Rückmann [31] analizan la estabilidad del conjunto factible en un contexto más restrictivo que el caso continuo, asumiendo que T es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^m con ciertas propiedades de regularidad y las restricciones son al menos de clase \mathcal{C}^1 . Encontramos también en la literatura numerosas contribuciones a la teoría de la estabilidad de familias paramétricas de problemas semi-infinitos (en general no lineales) en las que las funciones que determinan el objetivo y las restricciones son al menos de clase \mathcal{C}^1 . Jongen y Stein [33], para familias de problemas dependientes de un parámetro real, presentan una clasificación del conjunto de los puntos críticos generalizados en diferentes tipos. Cuando nos situamos en nuestro contexto de la PLSI con T arbitrario, a diferencia de otros contextos con mayor estructura, habremos de utilizar técnicas *ad hoc* basadas exclusivamente en la versión semi-infinita de los teoremas de alternativa.

Un enfoque analítico carece aquí de sentido, dada la arbitrariedad de las funciones de coeficientes.

La teoría de la estabilidad juega un papel importante en la medida en que frecuentemente el problema que se está resolviendo no es exactamente el problema original, sino un problema “próximo”, debido quizás a la presencia de errores en los datos (coeficientes de las restricciones y de la función objetivo), o a los errores de redondeo que se producen en el proceso computacional, entre otros factores. El análisis de la estabilidad aborda, entre otras, la cuestión de si problemas “próximos” aún conservan ciertas propiedades del problema original.

En la memoria se considera el espacio paramétrico de todos los problemas de PLSI, en \mathbb{R}^n , con el mismo conjunto de índices T , dotado de la topología de la convergencia uniforme de los parámetros (o datos) del problema (coeficientes de la función objetivo y de las restricciones), a través de una cierta distancia extendida. En este contexto entendemos que un problema π es *estable* o está *bien planteado* respecto de una propiedad si existe una bola centrada en π (en la topología considerada) formada por problemas con dicha propiedad. El objetivo fundamental de la memoria consiste en determinar, para un problema π , el máximo radio (en rigor es un supremo) de la bola centrada en π en la que se conserva determinada propiedad, a saber, consistencia (primal y/o dual), resolubilidad, etc.

Como paso previo al estudio de la estabilidad del problema de optimización abordamos el estudio de la estabilidad del sistema de restricciones asociado. De hecho, la estabilidad del sistema tiene repercusiones inmediatas sobre la estabilidad del problema, como señalan diferentes autores (véanse Dantzig *et al.* [13], Rockafellar and Wets [49] o Berge [3], entre otros), y como se verá también a lo largo de esta memoria.

Encontramos en la literatura sobre PLSI diferentes nociones de estabilidad de sistemas (véanse, por ejemplo, Robinson [46] y Tuy [51]) que resultan ser equivalentes (como se establece en [23] y [20]) a la siguiente propiedad: “todos los sistemas en algún entorno del sistema en cuestión son consistentes”, es decir, dicho sistema

está en el interior del conjunto formado por los sistemas consistentes. Por otro lado, se pueden encontrar otras nociones de buen planteamiento para un problema de optimización en conexión con la idea de resolución por medio de sucesiones aproximantes. En el contexto de la PLSI, [8] clasifica algunas de estas nociones, de nuevo estrechamente relacionadas con el hecho de que el sistema de restricciones asociado pertenezca al interior del conjunto de los sistemas consistentes (véase también [7]). Esta propiedad constituye el concepto de buen planteamiento de un sistema consistente para autores como Epelman, Freund y Vera (véanse [18] y [19]), en el contexto de los sistemas lineales cónicos. De hecho, estos autores se refieren a los sistemas mal planteados como aquellos sistemas para los cuales perturbaciones arbitrariamente pequeñas de los datos del sistema dan lugar tanto a sistemas consistentes como a sistemas inconsistentes, es decir, el “mal planteamiento” se identifica con la frontera del conjunto de los sistemas consistentes (o inconsistentes).

El concepto de *distancia al mal planteamiento* en el contexto de los sistemas lineales cónicos, como la distancia de un sistema consistente al conjunto de los problemas inconsistentes, fue introducido por Renegar en [44] (véase la sección 1 en [19] para comentarios adicionales). Esta distancia, además de constituir en sí misma una medida cuantitativa de la estabilidad o del buen planteamiento del sistema, desempeña un papel clave en el análisis de la complejidad de ciertos algoritmos como, métodos de punto interior en Renegar [45], el algoritmo del elipsoide en [19], o una generalización del algoritmo de von Neumann introducida en [18]. Por su parte, en Vera [52] se muestra como algoritmos eficientes (desde el punto de vista de la computación y de la precisión de los datos) para decidir la existencia de soluciones de problemas específicos de PL con datos aproximados, necesitan computación desmesurada y precisión excesiva en los datos sólo cuando los problemas están cerca del mal planteamiento.

En nuestro contexto de PLSI, en el caso en el que T es infinito (y sin estructura topológica alguna), aparece una clase especial de sistemas cuya distancia al mal planteamiento en el sentido anterior (i.e., cuya distancia a la frontera de los proble-

mas consistentes) es infinita. Este hecho diferencial nos conducirá a un concepto de mal planteamiento en un sentido generalizado, que coincide, cuando nos restringimos al caso finito, con el introducido originalmente por Renegar. El Capítulo 1 de esta memoria está dedicado al estudio del mal planteamiento tanto en el sentido ordinario como en el generalizado, proporcionando sendas expresiones para la distancia de un sistema arbitrario al mal planteamiento. En este momento destacamos que, mientras que el problema de hallar la distancia al mal planteamiento (en cada uno de los sentidos) se encuentra formulado en un espacio infinito-dimensional (el de todos los sistemas con conjunto de índices T), las expresiones obtenidas en la memoria vienen expresadas por problemas formulados en \mathbb{R}^{n+1} y en \mathbb{R}^n .

Cuando se considera el problema de PLSI completo, es decir, cuando se añade al sistema de restricciones la función objetivo, se puede estudiar la estabilidad del problema desde otros puntos de vista (diferentes a la consistencia). Concretamente, se puede analizar, por ejemplo, la estabilidad respecto de propiedades tales como la resolubilidad o la acotación del problema, y otras como la consistencia del problema dual, o incluso la consistencia simultánea de los problemas primal y dual asociado. A éstas últimas nos referiremos más adelante. Un problema se dice resoluble si el conjunto óptimo es no vacío y se dice acotado si el valor óptimo es finito (aunque es posible que éste no se alcance en ningún punto factible). Con la idea de que perturbaciones arbitrariamente pequeñas pueden dar lugar a problemas de diferentes tipos, los problemas que pertenecen a la frontera del conjunto de los problemas resolubles o a la frontera del conjunto de los problemas acotados están entonces mal planteados. Veremos que, en nuestro contexto de PLSI, ambas fronteras coinciden. En el Capítulo 2 de esta memoria se estudia el mal planteamiento de un problema, con respecto a la propiedad de resolubilidad, así como la distancia de un problema al conjunto de los problemas mal planteados en este sentido. Hay que resaltar que uno de los ingredientes claves en este estudio ha resultado ser la distancia al mal planteamiento generalizado para sistemas, lo cual ratifica los comentarios anteriores acerca de la influencia de la estabilidad del sistema de restricciones en la estabilidad

del problema de optimización completo.

En determinados trabajos desarrollados en el contexto de los sistemas lineales cónicos (véanse, por ejemplo, Nunez y Freund [41]), el concepto de distancia al mal planteamiento no sólo involucra la distancia del problema primal a la inconsistencia sino que también incluye la distancia a la inconsistencia del problema dual asociado (véase, por ejemplo, [44] para la definición de problema dual en este contexto); de hecho, esta última distancia es también introducida por Renegar en [44]. Nunez y Freund en [41], llaman problemas mal planteados a aquellos problemas que están en la frontera del conjunto formado por los problemas consistentes con dual asociado consistente, y consecuentemente, la distancia de un problema al mal planteamiento es su distancia a dicha frontera. Estos autores muestran la importante relación de esta distancia con ciertas propiedades de las soluciones a lo largo de la trayectoria central de un problema de optimización lineal. Además, como se subraya en el mismo trabajo, la trayectoria central es fundamental en el estudio de algoritmos de punto interior en Programación Lineal. Por otra parte, en el contexto de la Programación Convexa (PC), Nunez presenta en [40] una caracterización de los problemas mal planteados en el sentido que acabamos de describir, que “extiende” el trabajo de Robinson [47], donde se caracteriza el interior del conjunto de los problemas de PC que son consistentes con dual también consistente. En el último capítulo de esta memoria dedicamos una sección al análisis primal-dual de la estabilidad (véanse los Capítulos 2 y 8 en [21] para detalles acerca de la teoría de la dualidad). En una primera etapa se estudia el mal planteamiento respecto de la propiedad de consistencia del problema dual y en una segunda etapa se analiza la estabilidad respecto de la consistencia tanto del problema primal como del dual, obteniendo diferentes caracterizaciones y expresiones para las distancias al mal planteamiento en cada uno de los sentidos comentados. Los resultados obtenidos relacionan muchos de los conceptos que aparecen a lo largo de la memoria.

En otro orden de ideas, el estudio de la estabilidad de un problema puede enfocarse en términos de la variación del conjunto factible, valor óptimo y conjunto

óptimo bajo pequeñas perturbaciones de los datos. En esta línea, y desde una perspectiva “cualitativa”, se ubican los criterios de estabilidad basados en el estudio de las propiedades de continuidad de las (multi)funciones conjunto factible y conjunto óptimo y de la función valor óptimo. Un punto de vista más cuantitativo lo ofrecen los criterios basados en el estudio de propiedades de lipschitzianidad de las funciones anteriores.

En nuestro contexto de la PLSI con T arbitrario, diferentes trabajos de Goberna, López y Todorov (véanse [20], [23], [24]) analizan la semicontinuidad inferior (lsc), en el sentido de Berge, de la (multi)función conjunto factible para un problema consistente, proporcionando una amplia lista de propiedades equivalentes a ella, entre las que destacamos en este momento, la condición de que el problema se encuentre en el interior del conjunto de los problemas consistentes (recuérdese que esta constituía la noción de buen planteamiento para autores como Freund, Vera y Renegar). La semicontinuidad superior (usc) de dicha (multi)función ha sido analizada en [24] y [9]. Por su parte, el trabajo [7] está dedicado al estudio de estas mismas propiedades de continuidad (lsc y usc) para la función valor óptimo y la (multi)función conjunto óptimo. El antecedente inmediato al estudio de la estabilidad siguiendo los criterios aludidos en este párrafo lo encontramos en el caso continuo en los trabajos [4], [5] y [17]. Véase [39] para un análisis de la estabilidad del conjunto factible en el contexto más general de la PSI convexa (véase también [11] para un estudio acerca de las repercusiones de la lsc de la (multi)función conjunto factible en relación con el comportamiento de determinadas estrategias de discretización del sistema considerado).

En líneas generales, el trabajo [7] muestra el alto grado de estabilidad de las funciones valor óptimo y conjunto óptimo cuando en el problema considerado se satisfacen simultáneamente la lsc de la (multi)función conjunto factible y la acotación (y el carácter no vacío) del conjunto óptimo. El mismo trabajo establece que la verificación de ambas condiciones equivale al hecho de que el problema nominal se encuentre en el interior del conjunto de los problemas resolubles. Bajo estas

condiciones, se establece cierta propiedad de lipschitzianidad local de la función valor óptimo. Un ingrediente clave para establecer la existencia de una constante de Lipschitz es un ε tal que todo problema a distancia menor que ε del problema nominal siga siendo resoluble. Este hecho permite entrever (como se comprueba en la sección 3.5 de la memoria) que se puede determinar ya no la existencia, sino la propia constante de Lipschitz (una de ellas) en términos exclusivamente del problema nominal y de su distancia al mal planteamiento.

Previamente al estudio de la lipschitzianidad del valor óptimo, en el Capítulo 3 de la memoria se analizan determinadas propiedades de lipschitzianidad de la (multi)función conjunto factible, “pseudo-lipschitzianidad” y “calmness” (véase, por ejemplo, [35]), proporcionando expresiones explícitas para las constantes de Lipschitz involucradas. En este momento hacemos hincapié en que dichas constantes contienen en su denominador a la distancia al mal planteamiento, lo que redundaría en la idea de que cuánto mayor es dicha distancia, mayor estabilidad (menor “tasa de deformación”) del conjunto factible. Los resultados obtenidos entroncan con los de Renegar [44] para el caso de los sistemas lineales cónicos. Nuestro desarrollo presenta dos diferencias esenciales con el enfoque de dicho trabajo: por una parte nuestro tratamiento apela exclusivamente al problema nominal, mientras que [44] hace uso de la teoría de la dualidad, y por otro lado nuestro espacio paramétrico no es normado cuando T es infinito.

El cuerpo de esta memoria está constituido por tres capítulos, precedidos por un capítulo preliminar (Capítulo 0). Cada capítulo se divide en secciones y algunas de ellas contienen subsecciones. Los diferentes enunciados presentados a lo largo de la memoria (definiciones, teoremas, ejemplos, etc.) están numerados correlativamente con el número del capítulo, el de la sección y el del enunciado (independientemente del tipo de éste). Los enunciados que no van precedidos o acompañados por una referencia bibliográfica constituyen las aportaciones originales de esta memoria. A

continuación pasamos a presentar los contenidos de la memoria.

El Capítulo 0 está dedicado a describir el contexto en el que se desarrolla esta memoria así como las definiciones y los resultados básicos que serán de utilidad a lo largo de la misma. En la sección 0.1 se describe un problema general de PLSI y se presentan los espacios paramétricos de los sistemas de restricciones y de los problemas de optimización mostrando, en cada uno de ellos, los diferentes tipos de sistemas y de problemas que los componen con respecto a ciertas propiedades de los mismos, a saber, consistencia, acotación, resolubilidad, ... Se introducen asimismo las distancias (extendidas) entre sistemas y entre problemas que permiten dotar a los respectivos espacios paramétricos de la topología de la convergencia uniforme de los coeficientes del sistema y del problema. En la siguiente sección, 0.2, se presentan las herramientas básicas del Análisis Convexo que han sido de referencia continua en el transcurso de este trabajo. Las últimas dos secciones, 0.3 y 0.4, incluyen aquellos resultados acerca de sistemas y de problemas de PLSI necesarios en el desarrollo de esta memoria y a los que recurriremos en repetidas ocasiones en la misma.

Es conveniente comentar que, aunque en la última sección del Capítulo 3 se trabaja con el problema dual asociado a un problema de PLSI, los conceptos y los resultados básicos necesarios acerca de la teoría de la dualidad se presentan directamente en dicha sección con el fin de hacerla autocontenida.

El Capítulo 1 se centra en el estudio de la estabilidad, respecto de la propiedad de consistencia, de los sistemas de desigualdades lineales (semi-infinitos). En la sección 1.2 comenzamos mostrando la existencia, cuando el número de restricciones es infinito, de sistemas inconsistentes cuya distancia a la frontera del conjunto de los sistemas consistentes (mal planteamiento ordinario) es infinita. El conjunto de estos sistemas, será caracterizado (proposición 1.2.11) en términos del concepto de sistema reforzado, introducido en [9]. La presencia de este nuevo subconjunto del espacio paramétrico junto con el hecho de que el conjunto de los sistemas inconsistentes es unión de los conjuntos formados respectivamente por los sistemas fuertemente inconsistentes y débilmente inconsistentes, motiva la generalización del

concepto de mal planteamiento. De hecho, un sistema cuya distancia a la frontera del conjunto de los sistemas consistentes es infinita, está siempre bien planteado en sentido ordinario, a pesar de que perturbaciones arbitrariamente pequeñas pueden dar lugar a sistemas débilmente inconsistentes y a sistemas fuertemente inconsistentes. En este sentido, el teorema 1.2.15 y la proposición 1.2.17 justificarán la elección de la frontera de los sistemas fuertemente inconsistentes como el “mal planteamiento generalizado” (véase la Figura 1.11 al final de la sección 1.3). El teorema 1.2.14 caracterizará este conjunto (así como el interior del conjunto de los sistemas fuertemente inconsistentes y por tanto el exterior del mismo) en términos del que llamaremos *conjunto hipográfico*, el cual se introducirá en esta sección y desempeñará un papel clave en el trabajo. En la sección 1.3 se utiliza esta nueva herramienta para obtener una expresión para la distancia de un sistema arbitrario al mal planteamiento generalizado (teorema 1.3.3); cabe destacar que dicha expresión viene dada en términos de una distancia en \mathbb{R}^{n+1} . En la sección 1.4 abordamos el estudio de la distancia al mal planteamiento (ordinario) desde un punto de vista diferente, a través del concepto de *valor de consistencia* de un sistema, introducido en la misma sección, el cual, además de proporcionar dicha distancia, determina cuándo un sistema bien planteado lo es entre los consistentes o entre los inconsistentes (véanse el teorema 1.4.3 y los corolarios 1.4.4 y 1.4.5).

En el contexto de los sistemas lineales cónicos, Freund y Vera presentan en [19] diez problemas de optimización diferentes, cada uno de cuyos valores óptimos constituye una aproximación de la distancia (de un sistema dado) al mal planteamiento ordinario, distinguiendo dos casos dependiendo de si el sistema es consistente o no. Estos problemas se obtienen linealizando algunas restricciones de otro problema de optimización, introducido por Renegar en [45], que proporciona la distancia exacta. Aunque un sistema lineal semi-infinito puede reformularse como un sistema lineal cónico, y viceversa, la teoría de la estabilidad en cada caso es considerablemente diferente. No obstante, ambos contextos incluyen a los sistemas finitos de desigualdades lineales. Dedicamos pues la última sección de este capítulo a mostrar

que, cuando nos confinamos al caso finito, el sistema asociado a un problema de PLSI puede traducirse isométricamente al formato utilizado en [19]. Así pues, en este caso finito, disponemos de las expresiones de la distancia al mal planteamiento obtenidas en ambos contextos, que resultan ser complementarios.

En el Capítulo 2 abordamos la estabilidad del problema de optimización completo desde el punto de vista de la resolubilidad del mismo. Como comentábamos previamente, entendemos que un problema está mal planteado con respecto a la resolubilidad si pertenece a la frontera del conjunto formado por los problemas resolubles, en el sentido de que perturbaciones arbitrariamente pequeñas de sus coeficientes pueden dar lugar tanto a problemas resolubles como a problemas que no lo son. En un principio cabe la posibilidad de considerar, alternativamente, como problemas mal planteados aquéllos que se encuentran en la frontera del conjunto de los problemas acotados; sin embargo, el teorema 2.2.1 (iii) establece que ambas fronteras coinciden. En este capítulo se introducen dos subconjuntos de \mathbb{R}^n asociados al problema nominal π , que resultarán una herramienta clave en los teoremas 2.2.4 y 2.2.10, a la hora de caracterizar el mal planteamiento de π con respecto a la propiedad de resolubilidad, distinguiendo dos casos, dependiendo de que π se encuentre en el interior o en la frontera del conjunto de los problemas consistentes. En el segundo de los resultados interviene una condición adicional (en términos de que el problema π se pueda aproximar por problemas consistentes de la frontera del conjunto de los problemas consistentes) de la que en este momento señalamos que tan sólo involucra al sistema de restricciones asociado a π . El resto de la sección está dedicado a la búsqueda de una caracterización de dicha condición adicional en términos de los coeficientes del sistema, encontrando una caracterización satisfactoria en el caso en el que el conjunto de términos independientes del sistema, $\{b_t, t \in T\}$, es acotado (véanse los teoremas 2.2.12 y 2.2.14). En otro caso se obtienen condiciones necesarias y condiciones suficientes para la propiedad anunciada, en los teoremas 2.2.17 y 2.2.20.

La última sección de este capítulo (sección 2.3) utiliza los resultados obtenidos

anteriormente para determinar la distancia de un problema al mal planteamiento con respecto a la resolubilidad. El estudio se ha llevado a cabo distinguiendo fundamentalmente dos casos, dependiendo de que π se encuentre o no en la clausura del conjunto de los problemas resolubles. El teorema 2.3.1 proporciona una expresión explícita para dicha distancia en la primera de las situaciones (en cuyo caso, estamos calculando realmente la distancia a la irresolubilidad). El segundo caso presenta notables dificultades a la hora de determinar la distancia al mal planteamiento, incluso en el caso de problemas “sencillos” de PL ordinaria. En determinados casos se han obtenido cotas para dicha distancia (véanse las proposiciones 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6 y 2.3.11), que son ilustradas en la memoria con diferentes ejemplos, cuyo objetivo no es más que el de ahondar en las dificultades que pueden surgir en el caso en el que π se encuentra en el exterior del conjunto de los problemas resolubles.

El estudio de la distancia al mal planteamiento de un sistema de desigualdades lineales o de un problema de optimización lineal, en cualquiera de sus sentidos, viene en muchas ocasiones motivado por sus notables repercusiones en diferentes aplicaciones, a saber, estabilidad del conjunto factible, análisis de la complejidad de algoritmos para encontrar soluciones, tamaño del conjunto factible y del conjunto óptimo, sensibilidad del valor óptimo, estabilidad del problema dual, etc. Dedicamos el último capítulo de esta memoria (Capítulo 3) a mostrar las repercusiones de los resultados obtenidos en los Capítulos 1 y 2 en diferentes aplicaciones en la línea de las anteriormente citadas. En la sección 3.2 analizamos algunas propiedades de lipschitzianidad de la (multi)función conjunto factible, \mathcal{F} , o equivalentemente (véase Klatte y Kummer [35]), las correspondientes propiedades de regularidad de la (multi)función inversa, \mathcal{F}^{-1} . Concretamente, demostramos que \mathcal{F}^{-1} es métricamente regular (o \mathcal{F} es pseudo-Lipschitz) en cualquier (x^0, σ_0) perteneciente al grafo de \mathcal{F}^{-1} , esto es, siendo $x^0 \in \mathbb{R}^n$ un punto factible del sistema de PLSI σ_0 , cuando se asume que σ_0 se encuentra en el interior del conjunto de los sistemas consistentes. Se obtienen como consecuencia propiedades más débiles como una cota de error local para \mathcal{F}^{-1} (corolario 3.2.7) o una desigualdad de tipo Hoffman (corolario 3.2.9).

Estas nociones están relacionadas con el concepto de módulo de regularidad métrica analizado por Dontchev, Lewis y Rockafellar ([14] y [15]) en el análisis variacional. A lo largo de esta sección han jugado un papel importante los lemas 3.2.1 y 3.2.2, en particular, el segundo de ellos establece un resultado general de Análisis Convexo que caracteriza, para normas arbitrarias, la mejor aproximación de un punto exterior a un convexo cerrado y no vacío. La siguiente sección está dedicada al análisis de la complejidad del algoritmo del elipsoide para encontrar puntos del conjunto factible, F , de un sistema de desigualdades lineales (posiblemente infinito). Se caracteriza previamente la propiedad de que el interior del conjunto factible de un sistema consistente sea no vacío (corolario 3.3.2), y posteriormente, obtenemos los ingredientes principales (véase [19]) para obtener una cota de complejidad sobre el número de iteraciones (proposición 3.3.3 y corolario 3.3.4). En la siguiente sección (sección 3.4) obtenemos bolas que contienen al conjunto factible de un sistema consistente y al conjunto óptimo de un problema resoluble (teorema 3.4.3 y corolario 3.4.5 respectivamente), es más, dado un problema en el interior del conjunto de los problemas resolubles, se obtiene una bola que contiene uniformemente a ciertos conjuntos de nivel y a los conjuntos óptimos de problemas suficientemente próximos. Es sabido que la función valor óptimo es Lipschitziana en un entorno de un problema en el interior de los problemas resolubles (véase [7]). En la sección 3.5 se obtiene dicho resultado de forma alternativa aportando además una constante (uniforme) de Lipschitz dada a través de un cociente en cuyo denominador aparece la distancia al mal planteamiento con respecto a la consistencia.

En la última sección de este capítulo introducimos el problema dual asociado al problema π de PLSI (véase [21, Capítulos 2 y 8] para detalles acerca de la teoría de la dualidad en PLSI). En primer lugar estudiamos la estabilidad de un problema respecto de la propiedad de consistencia de su problema dual asociado (subsección 3.6.1). El interior del conjunto formado por los problemas dual-consistentes fue caracterizado en [25]. Utilizando este resultado, caracterizamos la frontera de este conjunto (y por tanto el exterior del mismo) que constituye otro tipo de mal plan-

teamiento para problemas (proposición 3.6.3 y corolario 3.6.4). El teorema 3.6.6 proporciona asimismo una expresión para la distancia al mal planteamiento en este sentido. La subsección 3.6.2 aborda la estabilidad de un problema respecto de la consistencia tanto del problema primal como del problema dual asociado. Como comentábamos anteriormente, diferentes autores han tratado esta cuestión en diferentes contextos (véanse, por ejemplo, [47] y [40] en PC, [41] y [44] en PL cónica o [25] en PLSI). Empezamos mostrando que el conjunto de los problemas primal-dual consistentes (i.e. consistentes con dual consistente) y el conjunto de los problemas resolubles, pese a ser distintos, tienen el mismo interior ([25]), la misma frontera y por tanto el mismo exterior (proposición 3.6.9). En nuestro contexto de PLSI, dicha proposición 3.6.9 junto con los resultados obtenidos en el Capítulo 2 para la distancia de un problema a la frontera del conjunto de los problemas resolubles, permite obtener de forma inmediata expresiones para la distancia de un problema a la frontera de los problemas primal y dual consistentes. Por último, en la subsección 3.6.3 se ofrece un estudio alternativo de la estabilidad del conjunto factible mediante un tratamiento primal-dual en el que sólo se permiten perturbaciones de los términos independientes de las restricciones. Este estudio está basado en las ideas de Renegar en [44], y muestra por su parte la notable dificultad de trasladar a nuestro contexto razonamientos de espacios normados (nuestro espacio paramétrico no es normado cuando el conjunto de índices es infinito). Otros autores como Peña en [42] han estudiado la estabilidad de un sistema lineal cónico con perturbaciones restringidas en este sentido.

Capítulo 0

Preliminares

0.1 Notación y definiciones

Consideremos el problema de optimización lineal, en \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } c'x \\ & \text{s.a } a_t'x \geq b_t, \quad t \in T, \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde c , x y a_t son vectores de \mathbb{R}^n , entendidos como matrices-columna, $b_t \in \mathbb{R}$, e y' denota al traspuesto de $y \in \mathbb{R}^n$.

Si el conjunto de índices T del sistema de restricciones, $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$, es infinito, estaremos ante un problema de PLSI. En nuestro tratamiento del tema, T será un conjunto arbitrario, sin estructura. En consecuencia las funciones $t \mapsto a_t$ y $t \mapsto b_t$ no gozan de ninguna propiedad en particular (y cuando T es infinito pueden incluso no estar acotadas).

Si X es un subconjunto de un espacio topológico, utilizaremos la siguiente notación: $\text{int}(X)$, $\text{ext}(X)$, $\text{cl}(X)$, y $\text{bd}(X)$ denotarán el *interior*, el *exterior*, la *clausura* (o adherencia), y la *frontera* de X , respectivamente. Si $X \subset \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, por $\text{rint}(X)$ representamos el *interior relativo* de X (esto es, el interior de X en la topología relativa a la variedad afín generada por X).

Si $X \subset [-\infty, +\infty]$, denotaremos por $\sup X$ e $\inf X$ al supremo y al ínfimo de X , respectivamente, conviniendo que $\sup \emptyset := -\infty$ e $\inf \emptyset := +\infty$.

0.1.1 El espacio paramétrico de los sistemas de desigualdades lineales

El *espacio paramétrico* de todos los sistemas de desigualdades de la forma

$$\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$$

asociados a problemas del tipo (0.1), denotado por Θ , puede identificarse con el espacio $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^T$, puesto que cada sistema σ se puede representar alternativamente por sus vectores de coeficientes $\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\}_{t \in T}$ (recuérdese que el producto cartesiano X^T no es más que el conjunto de todas las funciones de T en X). El subconjunto de Θ formado por todos los sistemas consistentes (i.e., con *conjunto factible*, F , no vacío) se denotará por Θ_c , mientras que Θ_i representará el subconjunto de todos los sistemas inconsistentes. De acuerdo con [23], distinguimos dos subconjuntos en Θ_i , los cuales constituyen una partición del mismo: Θ_{si} , el conjunto de todos los *sistemas fuertemente inconsistentes* (i.e., aquellos sistemas que tienen algún subsistema finito inconsistente), y $\Theta_{wi} := \Theta_i \setminus \Theta_{si}$, el conjunto de los *sistemas débilmente inconsistentes*. De este modo, la inconsistencia de $\sigma \in \Theta_{wi}$ no puede ser detectada mediante la observación de subsistemas finitos.

En la siguiente figura presentamos un esquema del espacio paramétrico de los sistemas, así como dos ejemplos de sistemas, uno débilmente inconsistente y otro fuertemente inconsistente. En las gráficas, los puntos representan los vectores de coeficientes $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$ de los sistemas en cuestión.

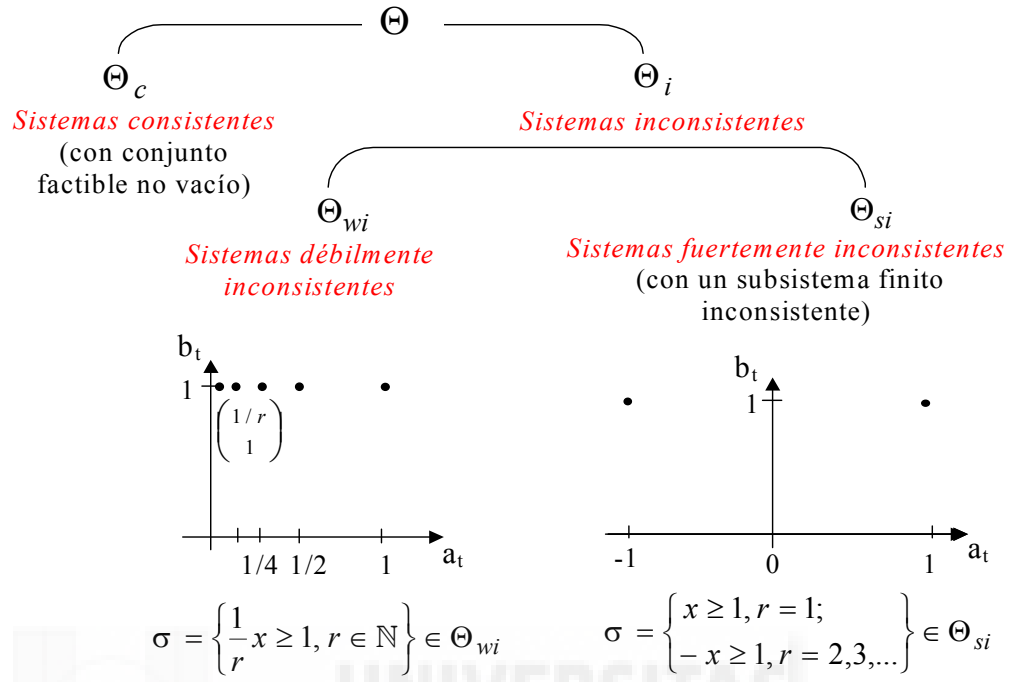


Figura 0.1: Partición del espacio paramétrico de los sistemas.

Cuando se consideran diferentes sistemas en Θ , ellos y sus elementos asociados se distinguirán mediante sub(super)índices. Así pues, si σ_1 también pertenece a Θ , escribimos $\sigma_1 := \{(a_t^1)'x \geq b_t^1, t \in T\}$.

Consideramos Θ dotado de la topología de la convergencia uniforme de los vectores de coeficientes, mediante la *distancia extendida* $d : \Theta \times \Theta \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$d(\sigma_1, \sigma) := \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|, \quad (0.2)$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma dada en \mathbb{R}^{n+1} . Obsérvese que la topología de Θ no depende de la norma $\|\cdot\|$ considerada.

Dados $\sigma \in \Theta$ y $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, escribiremos

$$d(\sigma, \tilde{\Theta}) := \inf \left\{ d(\sigma, \tilde{\sigma}), \tilde{\sigma} \in \tilde{\Theta} \right\} \in [0, +\infty].$$

0.1.2 El espacio paramétrico de los problemas de optimización lineal

El espacio paramétrico de los problemas de optimización lineal de la forma (0.1), denotado por Π , puede identificarse con $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n+1})^T$, identificando el problema π con el par (c, σ) (análogamente al caso de los sistemas, cuando se consideren diferentes problemas en Π , ellos y sus elementos asociados se distinguirán mediante sub(super)índices).

Denotaremos por Π_c al subconjunto de Π formado por los *problemas consistentes* (esto es, aquellos problemas cuyo sistema asociado es consistente). Asimismo $\Pi_i := \Pi \setminus \Pi_c$ representará al conjunto de los problemas inconsistentes. Por otra parte, Π_b denotará al subconjunto de todos los *problemas acotados*, esto es, aquéllos cuyo *valor óptimo*, v , es finito. Por último, denotaremos mediante Π_s al subconjunto de todos los *problemas resolubles*, es decir, aquéllos cuyo *conjunto de soluciones óptimas*, F^{op} , es no vacío. Obviamente, $\Pi_s \subset \Pi_b \subset \Pi_c$.

Para dotar a Π de la topología de la convergencia uniforme, consideraremos sendas normas en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^{n+1} que denotaremos indistintamente por $\|\cdot\|$. Introducimos entonces la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\delta(\pi_1, \pi) := \max \{ \|c^1 - c\|, d(\sigma_1, \sigma) \}, \quad (0.3)$$

donde $d(\sigma_1, \sigma)$ viene definida por (0.2).

Análogamente al caso de los sistemas, dados $\pi \in \Pi$ y $\tilde{\Pi} \subset \Pi$ escribiremos

$$\delta(\pi, \tilde{\Pi}) := \inf \{ \delta(\pi, \tilde{\pi}), \tilde{\pi} \in \tilde{\Pi} \} \in [0, +\infty].$$

0.2 Herramientas básicas del Análisis Convexo

Dado $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, por $conv(X)$, $cone(X)$, $span(X)$, y $aff(X)$, denotamos la *envoltura convexa* de X , la *envoltura convexa cónica* de X , el *subespacio generado*

por X , y la *envoltura afín* de X , respectivamente. Se asume que $\text{cone}(X)$ siempre contiene al vector cero, 0_k , y por tanto $\text{cone}(\emptyset) = \{0_k\}$. Asimismo, denotaremos por X° al *cono polar positivo* (o *cono dual*) de X que viene dado por

$$X^\circ := \{y \in \mathbb{R}^k \mid y'x \geq 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

Si en \mathbb{R}^k consideramos una norma cualquiera, $\|\cdot\|$, la *bola abierta unidad* para dicha norma se representará por B . Asimismo, si denotamos por $\|\cdot\|_*$ a la norma dual de $\|\cdot\|$, esto es,

$$\|u\|_* := \max \{u'z \mid \|z\| \leq 1\}, \text{ para } u \in \mathbb{R}^k,$$

la bola abierta unidad para la norma dual se representará por B_* . Es bien sabido que la norma dual de una p -norma, $\|\cdot\|_p$, con $p \in [1, +\infty]$, es $\|\cdot\|_q$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (entendiendo $\frac{1}{+\infty} = 0$). De este modo, la norma del supremo (o norma de Chebyshev) se representará por $\|\cdot\|_\infty$.

El siguiente lema, que puede encontrarse, por ejemplo, en [27, V.3.2] o [48, Sección 15], describe la bola unidad cerrada asociada a cualquier norma mediante un sistema de desigualdades lineales.

Lema 0.2.1 *Se tiene que*

$$cl(B) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid u'x \leq 1 \text{ para todo } u \in bd(B_*)\}.$$

El hecho de que los resultados a lo largo de esta memoria estén formulados para normas generales en \mathbb{R}^k , conllevará al uso frecuente de la desigualdad

$$|u'v| \leq \|u\| \|v\|_*, \quad u, v \in \mathbb{R}^k, \tag{0.4}$$

que, para p -normas, es bien conocida como *desigualdad de Hölder*. Será también de utilidad la siguiente propiedad (véase, por ejemplo, [27, V.3.2])

Lema 0.2.2 Dado $u \in \mathbb{R}^k$, existe $w \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\}$, tal que $u'w = \|u\| \|w\|_*$.

Para una sucesión $\{\mu_r\}$, $\lim_r \mu_r$ significará $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mu_r$, mientras que $\mu_r \downarrow a$ significará que $\lim_r \mu_r = a$ y que $\{\mu_r\}$ es decreciente a partir de un cierto $r_0 \in \mathbb{N}$. Por su parte, $\limsup_r \mu_r$ y $\liminf_r \mu_r$ denotarán al límite superior y al límite inferior de $\{\mu_r\}$ respectivamente.

En la sección anterior hemos introducido los conjuntos Θ_c , Θ_{wi} y Θ_{si} , que constituyen una partición del espacio Θ . El teorema 0.3.1 los caracterizará en términos de los siguientes conos convexos asociados al sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$: el *segundo cono de momentos*, dado por

$$N := \text{cone} \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\} \right),$$

y el *cono característico*, dado por

$$K := N + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$.

El teorema 0.3.2 caracterizará asimismo $\text{int}(\Theta_{si})$ a través del cono N .

Otra herramienta clave será el *primer cono de momentos* asociado a σ , que viene dado por

$$M := \text{cone}(\{a_t, t \in T\}).$$

Concretamente, en términos de dicho cono puede caracterizarse la acotación del conjunto factible de $\sigma \in \Theta_c$ (véase el teorema 0.3.4).

Por su parte, la envoltura convexa de los vectores de coeficientes de $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, que denotaremos por C , esto es,

$$C := \text{conv} \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\} \right),$$

constituye un ingrediente clave en la caracterización de $\text{int}(\Theta_c)$ (véase el teorema

0.3.3). En ocasiones recurriremos al siguiente conjunto asociado a σ :

$$A := \text{conv}(\{a_t, t \in T\}).$$

Obsérvese además que $M = \mathbb{R}_+A$ y $N = \mathbb{R}_+C$.

Si σ es un sistema consistente con conjunto factible F , decimos que $a'x \geq b$ es una *consecuencia* de σ si esta desigualdad se satisface en cada punto de F ; i.e., $a'z \geq b$ para todo $z \in F$. El *Lema de Farkas no homogéneo* ([54]) caracteriza las desigualdades lineales $a'x \geq b$ que son consecuencia del sistema $\sigma \in \Theta_c$ como aquéllas que satisfacen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{cl}(K). \quad (0.5)$$

Por esta razón, cuando $\sigma \in \Theta_c$, $\text{cl}(K)$ es llamado también *cono de las relaciones consecuentes* de σ .

Si introducimos el cono $\mathbb{R}_+^{(T)}$ de todas las funciones $\lambda : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ que toman valores positivos sólo en una cantidad finita de puntos de T , (0.5) es equivalente a la existencia de sucesiones $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\{\mu_r\} \subset \mathbb{R}_+$ tales que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu_r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

donde $\lambda^r = (\lambda_t^r)_{t \in T}$, $r = 1, 2, \dots$

Existen diferentes nociones de separación mediante hiperplanos en \mathbb{R}^k (véase, por ejemplo, [48, Sección 11]). Decimos que los subconjuntos X e Y de \mathbb{R}^k se pueden *separar* si existe $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$ con $a \neq 0_k$ tal que $a'x \leq b \leq a'y$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ (el hiperplano de ecuación $a'x = b$ es un hiperplano separador de X e Y). Los conjuntos X e Y se pueden separar *propriadamente* cuando es posible elegir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de forma que X e Y no estén ambos contenidos en el hiperplano separador.

Se dice que la separación es *estricta* cuando $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ puede escogerse de forma que $a'x < b < a'y$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$. La separación es *fuerte* cuando

$$\sup \{a'x \mid x \in X\} < \inf \{a'y \mid y \in X\}.$$

A lo largo de esta memoria utilizaremos con frecuencia el caso particular en el que X se reduce a un punto $x \in \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$ es convexo cerrado y no vacío. En dicho caso, las nociones de separación estricta y separación fuerte coinciden, pudiendo enunciarse en este caso en términos de la existencia de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$, con $a \neq 0_k$, tal que

$$a'x < b \leq a'y \text{ para todo } y \in Y.$$

En estas condiciones, es bien sabido que $\{x\}$ e Y se pueden separar estrictamente si y sólo si $x \in \text{ext}(Y)$; mientras que si $x \in \text{bd}(Y)$ existe al menos un hiperplano separador, que es de hecho un hiperplano a Y en x .

Por otra parte, el teorema 11.3 en [48], al que haremos referencia en el lema 3.2.2, establece que dos subconjuntos convexos no vacíos de \mathbb{R}^k se pueden separar propiamente si y sólo si sus interiores relativos no tienen puntos en común.

Otra de las nociones importantes en esta memoria es la de *mejor aproximación* de un punto en un convexo cerrado de \mathbb{R}^k . Concretamente, dados un conjunto, X , cerrado y no vacío de \mathbb{R}^k y un punto $\hat{x} \notin X$, se dice que $\bar{x} \in X$ es una mejor aproximación de \hat{x} en X (respecto de la norma $\|\cdot\|$) si $d(\hat{x}, X) = \|\hat{x} - \bar{x}\|$, donde, como es habitual, $d(\hat{x}, X) := \inf \{\|\hat{x} - x\| \mid x \in X\}$. Nótese que d representa indistintamente (distinguiéndose por el contexto) a la distancia introducida en el espacio paramétrico de los sistemas, Θ , y a la distancia en \mathbb{R}^k . Es bien sabido que, si $X \subset \mathbb{R}^k$ es convexo cerrado y no vacío y la norma considerada en \mathbb{R}^k es la norma euclídea, entonces existe una única mejor aproximación, \bar{x} , de \hat{x} en X , y además para todo $x \in X$, se verifica

$$(\bar{x} - \hat{x})' x \geq (\bar{x} - \hat{x})' \bar{x}. \quad (0.6)$$

Esta última relación se puede interpretar de dos formas: por una parte, si X es el conjunto factible de un sistema de desigualdades lineales, (0.6) es una consecuencia de dicho sistema; por otra parte (0.6) nos dice que $(\bar{x} - \hat{x})' x = (\bar{x} - \hat{x})' \bar{x}$ es la

ecuación de un hiperplano soporte a X en \hat{x} . El lema 3.2.2 proporcionará una generalización de (0.6) cuando en \mathbb{R}^k se considere una norma general.

En otro orden de ideas, dado un conjunto no vacío $X \subset \mathbb{R}^k$, el *cono asintótico* de X , denotado por X_∞ , es el conjunto de todos los límites de la forma $\lim_r \mu_r x^r$, donde $\mu_r \in \mathbb{R}_+$, $x^r \in X$, $r = 1, 2, \dots$, y $\mu_r \downarrow 0$. El lema 2.1 en [24] recoge algunas propiedades de este cono. En particular, X_∞ es siempre cerrado y $X_\infty = (cl(X))_\infty$. Además, si X es un conjunto convexo cerrado, entonces X_∞ coincide con el *cono de recesión* de X , $O^+(X)$, que viene dado por

$$O^+(X) := \{y \in \mathbb{R}^k \mid x + \lambda y \in X \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } \lambda \geq 0\}.$$

A lo largo del Capítulo 1 será de utilidad el concepto de *sistema reforzado* asociado a un sistema σ (introducido en [9] en relación con la semicontinuidad superior de la (multi)función conjunto factible):

$$\sigma^R := \left\{ a'x \geq b, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in C_\infty \right\}.$$

Denotaremos por N^R al segundo cono de momentos asociado a σ^R . Obviamente $N^R = C_\infty$.

A lo largo de esta memoria recurriremos en repetidas ocasiones a los siguientes resultados generales de Análisis Convexo.

Teorema 0.2.3 [21, Teorema A.5] *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo y no vacío. Se tiene:*

- (i) *$\text{rint}(X)$ es un conjunto convexo y no vacío;*
- (ii) *$\text{rint}(cl(X)) = \text{rint}(X)$ y $cl(\text{rint}(X)) = cl(X)$;*
- (iii) *Si $x \in \text{rint}(X)$ e $y \in cl(X)$, entonces el segmento $]x, y[$ está contenido en $\text{rint}(X)$ (Lema de accesibilidad).*

Teorema 0.2.4 [21, Teorema A.7] *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y $z \in \text{aff}(X)$ (respectivamente $z \in \text{span}(X)$). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *$z \in \text{rint}(\text{conv}(X))$ (respectivamente $z \in \text{rint}(\text{cone}(X))$);*

(ii) existen puntos $x^i \in X$, $i = 1, 2, \dots, p$, con $\text{aff}(\{x^1, x^2, \dots, x^p\}) = \text{aff}(X)$ (respectivamente $\text{span}(\{x^1, x^2, \dots, x^p\}) = \text{span}(X)$), y escalares positivos α_i , $i = 1, 2, \dots, p$, tales que $z = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^i$, y $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ (respectivamente $\sum_{i=1}^p \alpha_i$ es arbitraria).

Como consecuencia de este teorema se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 0.2.5 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Entonces, se tienen:

- (i) $0_n \in \text{rint}(\text{conv}(X))$ si y sólo si $0_n \in \text{rint}(\text{cone}(X))$;
- (ii) $z \in \text{rint}(\text{cone}(X))$ si y sólo si $0_n \in \text{rint}(\text{conv}(X \cup \{-z\}))$.

0.3 Resultados preliminares acerca de sistemas de desigualdades lineales

El siguiente resultado caracteriza, como ya anunciamos en la sección anterior, los conjuntos Θ_c , Θ_{wi} y Θ_{si} en términos de los conos N y K .

Teorema 0.3.1 [21, Teorema 4.4]. Dado $\sigma \in \Theta$, se verifican los siguientes enunciados:

- (i) $\sigma \in \Theta_c$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl}(N)$;
- (ii) $\sigma \in \Theta_{wi}$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cl}(N) \setminus N$;
- (iii) $\sigma \in \Theta_{si}$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N$.

Además, N se puede reemplazar por K en las afirmaciones anteriores.

En la siguiente figura se ilustra gráficamente el contenido del teorema anterior:

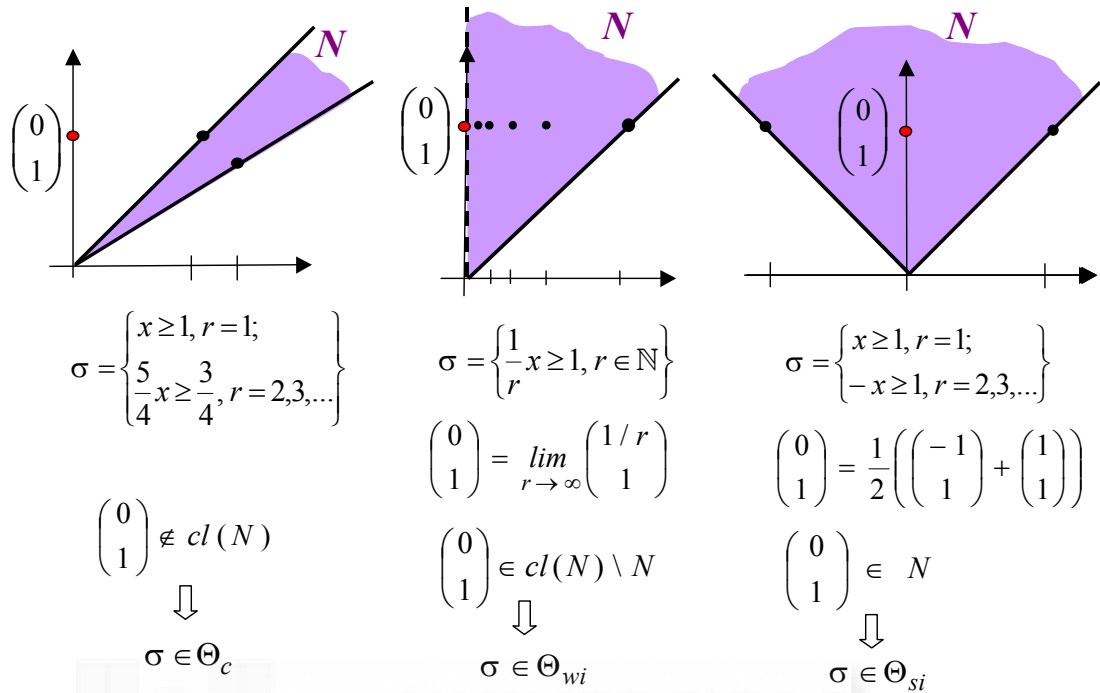


Figura 0.2: Ilustración del Teorema 0.3.1.

Los siguientes teoremas caracterizan $int(\Theta_{si})$ e $int(\Theta_c)$, respectivamente. En el segundo de ellos nos referimos a la *condición fuerte de Slater* (SSC), la cual es satisfecha por un sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ cuando existen $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\rho > 0$ tales que $a'_t \bar{x} \geq b_t + \rho$ para todo $t \in T$. En tal caso, se dice que \bar{x} es un *punto fuerte de Slater*, o *SS-elemento*, de σ .

Teorema 0.3.2 (Véase [23, Teorema 4.3]) *Sea $\sigma \in \Theta$. Entonces, $\sigma \in int(\Theta_{si})$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in int(N)$.*

Teorema 0.3.3 (Véase [23, Teorema 3.1]) *Sea $\sigma \in \Theta_c$. Son equivalentes:*

- (i) $\sigma \in int(\Theta_c)$;
- (ii) $0_{n+1} \notin cl(C)$;
- (iii) σ *satisface la SSC*.

El teorema 6.1 de [21] (véanse también [23, Teorema 3.1] y [20]), añade a las tres condiciones equivalentes del teorema anterior las seis siguientes (véanse las correspondientes definiciones en [21, Secciones 6.1 y 6.2]):

- La (multi)función conjunto factible, \mathcal{F} , es semicontinua inferiormente en σ ;
- σ es no crítico (en el sentido de Tuy [51]);
- σ es regular (en el sentido de Robinson [46]);
- \mathcal{F} es R-estable en σ (en el sentido de Robinson [46]);
- \mathcal{F} es dimensionalmente estable en σ ;
- \mathcal{F} es topológicamente estable en σ (bajo la hipótesis adicional $0_n \notin bd(A)$).

Aludiremos a alguna de estas nociones en secciones posteriores. En concreto, nos referiremos a la condición fuerte de Slater en la sección 1.4 y a la R-estabilidad en la sección 3.2.

El siguiente teorema caracteriza la acotación del conjunto factible, F , de un sistema consistente, σ . Nótese que, cuando $\sigma \in \Theta_c$, $O^+(F) = M^\circ$.

Teorema 0.3.4 (Véanse [21, Teorema 9.3] y el corolario 0.2.5) *Sea $\sigma \in \Theta_c$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) F es acotado;
- (ii) $M = \mathbb{R}^n$;
- (iii) $O^+(F) = \{0_n\}$;
- (iv) $0_n \in \text{int}(M)$;
- (v) $0_n \in \text{int}(A)$.

Con relación al concepto de sistema reforzado introducido en la sección anterior, se tiene en virtud del Lema de Farkas que, si $\sigma \in \Theta_c$, todas las restricciones de σ^R son consecuencias de σ . Por tanto, para todo $\sigma \in \Theta$, el conjunto factible de σ^R ,

denotado por F^R , contiene el conjunto factible de σ , F . Además, se tiene el siguiente resultado.

Lema 0.3.5 [9, Lema 3.4] *Si $\sigma, \sigma_1 \in \Theta$ y $d(\sigma, \sigma_1) < +\infty$, entonces $\sigma_1^R = \sigma^R$.*

Así pues, tanto si σ es consistente como si no lo es, F^R contiene a todos los conjuntos factibles de todos los sistemas cuya distancia a σ es finita. En particular, si $\sigma^R \in \Theta_i$; i.e., $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N^R$ (por el teorema 0.3.1 junto con el hecho de que N^R es cerrado), se tiene que $d(\sigma, \Theta_c) = +\infty$.

0.4 Resultados preliminares acerca de problemas de optimización lineal

El siguiente resultado proporciona diferentes caracterizaciones de aquellos problemas consistentes que están en el interior del conjunto de los problemas resolubles, así como condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto óptimo de un problema consistente sea no vacío y acotado.

Teorema 0.4.1 [21, Corolario 9.3.1][7, Lema 4.1] *Dado $\pi = (c, \sigma) \in \Pi_c$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) $\pi \in \text{int}_c(\Pi_s)$ (el interior de Π_s en la topología relativa a Π_c);
- (ii) $c \in \text{int}(M)$;
- (iii) F^{op} es acotado y no vacío;
- (iv) $\{a_t, t \in T; -c\}^o = \{0_n\}$.

El conjunto $\{a_t, t \in T; -c\}^o$ no es otro que el cono de recesión de los conjuntos de nivel inferior no vacíos de π ; donde, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel inferior α , $L(\alpha)$, viene dado por

$$L(\alpha) := \{x \in F \mid c'x \leq \alpha\}.$$

Nótese que $F^{op} = L(v)$ cuando $\pi \in \Pi_b$. Se puede añadir ahora una nueva condición equivalente a las cuatro dadas en el teorema anterior:

- $L(\alpha)$ es acotado para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $L(\alpha) \neq \emptyset$.

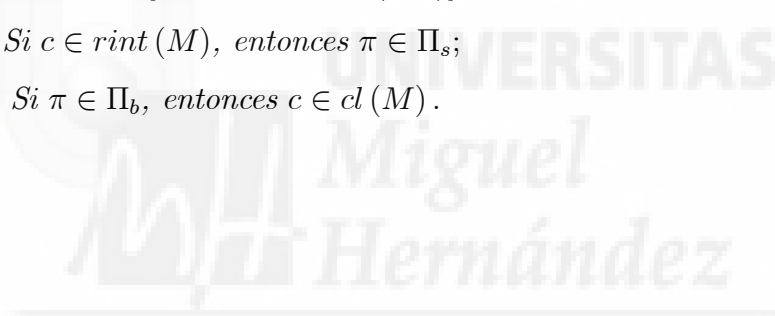
Como consecuencia inmediata de los apartados (i) y (ii) del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 0.4.2 *Sea $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$. Entonces $\pi \in \text{int}(\Pi_s)$ si y sólo si $c \in \text{int}(M)$.*

El siguiente resultado, proporciona una condición suficiente y otra necesaria para que un problema consistente sea resoluble.

Teorema 0.4.3 [21, Teorema 8.1(iv,v)] *Sea $\pi \in \Pi_c$. Se tiene:*

- Si $c \in \text{rint}(M)$, entonces $\pi \in \Pi_s$;*
- Si $\pi \in \Pi_b$, entonces $c \in \text{cl}(M)$.*



Capítulo 1

Medidas del mal planteamiento relativo a la consistencia de un sistema de desigualdades lineales

1.1 Introducción

Como apuntábamos en la sección 0.3 (véanse el teorema 0.3.3 y los comentarios posteriores), diferentes nociones de estabilidad del conjunto factible de un sistema debidas a diversos autores se traducen en nuestro contexto de la PLSI en la condición “ $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ ”. Para un sistema en estas condiciones, la cantidad $d(\sigma, \text{bd}(\Theta_c))$ nos proporciona una medida de la estabilidad del sistema. Entre otras aplicaciones, esta medida nos permitirá, en la sección 3.2, profundizar en el estudio cuantitativo de la estabilidad de la (multi)función conjunto factible.

En el contexto de los *sistemas lineales cónicos* (véase §1.5), [18] y [19] hacen uso de la distancia de un sistema dado a la frontera del conjunto de los sistemas consistentes con el fin de obtener cotas para la *complejidad algorítmica* de ciertos métodos de búsqueda de soluciones del sistema. En estos trabajos, los autores se refieren a dicha distancia como *distancia al mal planteamiento* (“*distance to ill-*

posedness”) y muestran su relación con cierto *número de condición* del sistema considerado. Un sistema de la frontera del conjunto de los sistemas consistentes es considerado *mal planteado* por estos autores en el sentido en que perturbaciones arbitrariamente pequeñas pueden dar lugar tanto a sistemas consistentes como a inconsistentes. Por otra parte, [44] y [45] tratan con la distancia de un sistema consistente al conjunto de los sistemas inconsistentes. En ambos casos el espacio paramétrico de los sistemas es un espacio vectorial normado y, por tanto, la distancia desde un punto de un subconjunto dado a la frontera del mismo coincide con la distancia al complementario (obsérvese que esto no es cierto en un espacio métrico general). Así pues, las nociones de “distancia al mal planteamiento” consideradas por estos autores coinciden. El corolario 1.2.3 mostrará que ambas distancias también coinciden en nuestro contexto (nótese sin embargo que, cuando T es infinito, Θ no es un espacio normado¹). No obstante, cuando se considera un sistema de desigualdades lineales con infinitas restricciones, cabe la posibilidad de que su distancia a la frontera de los problemas consistentes sea infinita (lo que no puede ocurrir, por ejemplo, cuando los vectores de coeficientes del sistema en cuestión están acotados, como es el caso de la PL ordinaria). Veremos que un sistema con esta propiedad se caracteriza por tener el vector $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ en el segundo cono de momentos de su sistema reforzado. Por otra parte, aunque un sistema de este tipo está siempre bien planteado en sentido clásico (puesto que no puede pertenecer al $bd(\Theta_c)$), puede ser “inestable” si se encuentra en la frontera del conjunto de los problemas fuertemente inconsistentes, de modo que $bd(\Theta_{si})$ constituirá un tipo de mal planteamiento para esta clase de sistemas (véase §1.2). El teorema 1.2.15 probará por su parte que, cuando nos confinamos al subconjunto de los problemas cuya distancia a la frontera del conjunto de los problemas consistentes es finita, $bd(\Theta_c)$ y $bd(\Theta_{si})$ coinciden, lo cual dará lugar a considerar $bd(\Theta_{si})$ como el conjunto de los sistemas *mal planteados en sentido generalizado*. El teorema 1.2.14 caracterizará

¹De acuerdo con Holmes [29, Corolario en pág. 56], \mathbb{R}^T es normable si y sólo si el conjunto de índices T es finito.

$bd(\Theta_{si})$ en términos del que llamaremos *conjunto hipográfico* asociado a un sistema, uno de los conceptos claves en esta memoria.

Existen diferentes métodos para determinar cuándo un sistema es consistente, y para abordar el subsiguiente problema de calcular puntos factibles. Con frecuencia se utilizan determinados parámetros al analizar estos métodos. Algunos de dichos parámetros intervienen, por ejemplo, en ciertas reglas de parada. Un ejemplo típico de parámetro es el *tamaño de un sistema* el cual es una generalización directa del número de condición de una matriz. Se utiliza, por ejemplo, para analizar métodos de punto interior como el “método de barrera” (véase [45]). La noción de tamaño de un sistema depende sólo de la distancia al mal planteamiento, y diferentes autores han dedicado un esfuerzo considerable a determinar esta cantidad. En las secciones 1.3 y 1.4 proporcionamos sendas expresiones para calcular la distancia al mal planteamiento en sentido generalizado y en sentido ordinario, respectivamente, en nuestro contexto de la PLSI (que engloba a la PL ordinaria). La primera de ellas viene dada como la distancia del vector $0_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ al conjunto hipográfico asociado al sistema considerado, así pues, como una distancia en el espacio \mathbb{R}^{n+1} . La segunda expresión, para la distancia $d(\sigma, bd(\Theta_c))$, constituirá otro de los conceptos claves de esta memoria, y permitirá además reconocer aquellos sistemas que son estables respecto de la consistencia o de la inconsistencia, y en este sentido ha sido denominada *valor de consistencia* del sistema. Ambas distancias, además de constituir en sí herramientas importantes en diferentes campos como hemos comentado en párrafos anteriores, serán de notable utilidad en los capítulos posteriores.

Por último, en la sección 1.5 extendemos algunos comentarios realizados a lo largo de este capítulo relativos a la “intersección” entre el contexto lineal cónico analizado en [19] y nuestro contexto de desigualdades lineales. Concretamente, se muestra como el caso de los sistemas finitos de desigualdades lineales en \mathbb{R}^n constituye un punto de encuentro entre ambos contextos en el que los resultados del presente capítulo y los que pueden encontrarse en [19] resultan ser complementarios.

1.2 Caracterización del mal planteamiento generalizado

Comenzaremos con un lema técnico que nos conducirá al corolario 1.2.3, comentado en la sección anterior. Recuérdese que el enunciado de dicho corolario no es cierto en un espacio métrico arbitrario.

Lema 1.2.1 *Sea $\emptyset \neq \tilde{\Theta} \subsetneq \Theta$, $\tilde{\sigma} = \{\tilde{a}'_t x \geq \tilde{b}_t, t \in T\} \in \tilde{\Theta}$, y $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\} \in \Theta \setminus \tilde{\Theta}$. Supongamos que $d(\tilde{\sigma}, \sigma) < +\infty$. Entonces, existe $\lambda^* \in [0, 1]$ de manera que el sistema*

$$(1 - \lambda^*)\tilde{\sigma} + \lambda^*\sigma := \left\{ ((1 - \lambda^*)\tilde{a}_t + \lambda^*a_t)'x \geq (1 - \lambda^*)\tilde{b}_t + \lambda^*b_t, t \in T \right\}$$

pertenece a $bd(\tilde{\Theta})$ ($= bd(\Theta \setminus \tilde{\Theta})$).

Demostración. Sea $\Gamma := \{\lambda \in [0, 1] \mid \sigma_\lambda \in \tilde{\Theta}\}$, donde $\sigma_\lambda := (1 - \lambda)\tilde{\sigma} + \lambda\sigma$, y sea $\lambda^* := \sup \Gamma$. Puesto que, para cada $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que $d(\sigma_\lambda, \sigma_{\lambda^*}) = |\lambda - \lambda^*| d(\tilde{\sigma}, \sigma)$, es inmediato que $\sigma_{\lambda^*} \in bd(\tilde{\Theta})$. ■

Observación 1.2.2 La hipótesis $d(\tilde{\sigma}, \sigma) < +\infty$ en el lema anterior no es superflua. De hecho, si $d(\tilde{\sigma}, \sigma) = +\infty$ y $\lambda \neq \lambda^*$, entonces $d(\sigma_\lambda, \sigma_{\lambda^*}) = +\infty$.

Corolario 1.2.3 *Dados $\emptyset \neq \tilde{\Theta} \subsetneq \Theta$ y $\sigma \notin \tilde{\Theta}$, se tiene*

$$d(\sigma, \tilde{\Theta}) = d(\sigma, bd(\tilde{\Theta})).$$

En particular, si $\sigma \in \Theta_i$, entonces, $d(\sigma, \Theta_c) = d(\sigma, bd(\Theta_c))$; y si $\sigma \in \Theta_c$, entonces, $d(\sigma, \Theta_i) = d(\sigma, bd(\Theta_c))$.

Demostración. La demostración de que $d(\sigma, \tilde{\Theta}) \leq d(\sigma, bd(\tilde{\Theta}))$ es estándar. Con el objetivo de establecer la desigualdad contraria, podemos suponer el caso no trivial

$d(\sigma, \tilde{\Theta}) < +\infty$. Entonces la desigualdad deseada se sigue del hecho de que para cada $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Theta}$ existe $\bar{\sigma} \in bd(\tilde{\Theta})$ tal que $d(\sigma, \bar{\sigma}) \leq d(\sigma, \tilde{\sigma})$, como se deduce del lema anterior (tomando $\bar{\sigma} = \sigma_{\lambda^*}$). ■

Observación 1.2.4 Si $\sigma \in \Theta_c$, entonces $d(\sigma, \Theta_i) < +\infty$, puesto que obtenemos un sistema inconsistente sin más que reemplazar una restricción elegida arbitrariamente de σ por $0'_n x \geq 1$.

Observación 1.2.5 Los sistemas que verifican que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N^R$ tienen un comportamiento anormal cuando intentamos medir su distancia al $bd(\Theta_c)$. Más precisamente, apelando al comentario realizado al final de la sección 0.3 junto con el corolario 1.2.3, tenemos $d(\sigma, bd(\Theta_c)) = d(\sigma, \Theta_c) = +\infty$, para estos sistemas.

Probaremos que ambas condiciones, “ $d(\sigma, bd(\Theta_c)) = +\infty$ ” y “ $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N^R$ ”, son de hecho equivalentes. Antes, presentamos dos lemas técnicos.

Lema 1.2.6 Sea $\sigma \in \Theta$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$ para alguna sucesión $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r = 0$. Entonces, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N^R$.

Demostración. Escribimos $\gamma_r := \sum_{t \in T} \lambda_t^r$, $r = 1, 2, \dots$. Las hipótesis garantizan la existencia de $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_r > 0$, para todo $r \geq r_0$. Entonces, la expresión

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_r \gamma_r \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},$$

asegura que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N^R$. ■

Lema 1.2.7 Sea $\sigma \in \Theta_i$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl(N) \setminus N^R$. Entonces, existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} \in cl(C).$$

Demostración. Por hipótesis existe una sucesión $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$, y el lema previo implica que la sucesión $\{\gamma_r\}$ no converge a cero, donde $\gamma_r := \sum_{t \in T} \lambda_t^r$ para todo r . Por consiguiente, $\{\gamma_r\}$ tiene una subsucesión, denotada de la misma forma para abreviar, tal que $\gamma_r > 0$ para todo r y $\{1/\gamma_r\}$ converge a cierto $\rho \geq 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} = \lim_r \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in cl(C).$$

■

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin N^R$ no es superflua.

Ejemplo 1.2.8 Consideremos el sistema, en \mathbb{R} , dado por

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{t} x_1 \geq t, t \in]0, +\infty[\right\}.$$

Tenemos que $cl(C) = \{(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_1 x_2 \geq 1\}$ que es disjunto de $\mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obsérvese que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1/t \\ t \end{pmatrix} \in N^R$.

Definición 1.2.9 *Introducimos el conjunto*

$$\Theta_\infty := \{\sigma \in \Theta \mid d(\sigma, bd(\Theta_c)) = +\infty\}.$$

Como ilustración del conjunto Θ_∞ y con el fin de motivar su caracterización (en la proposición 1.2.11), presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.10 Consideremos el sistema dado por

$$\sigma := \left\{ \begin{array}{l} tx \geq t, t = 1, 2, \dots \\ -tx \geq t, t = 1, 2, \dots \end{array} \right\}.$$

Tenemos que $\sigma \in \Theta_i$ (de hecho, $\sigma \in \Theta_{si}$). La siguiente figura representa gráficamente el segundo cono de momentos de σ

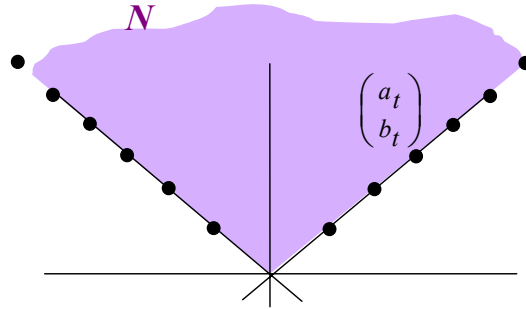


Figura 1.1: Segundo cono de momentos de σ .

Dado cualquier $\sigma_1 \in \Theta$ con $d(\sigma_1, \sigma) < +\infty$, tenemos que $\sigma_1 \in \Theta_i$. En efecto, cualquier σ_1 en tales condiciones será de la forma

$$\sigma_1 := \left\{ \begin{array}{l} (t + \varepsilon_t^1)x \geq t + \varepsilon_t^2, t = 1, 2, \dots \\ (-t + \varepsilon_t^3)x \geq t + \varepsilon_t^4, t = 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

con $\sup \{|\varepsilon_t^i| : t = 1, 2, \dots\} < +\infty$, para $i = 1, 2, 3, 4$, verificándose entonces que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t} \left\{ \begin{pmatrix} t + \varepsilon_t^1 \\ t + \varepsilon_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t + \varepsilon_t^3 \\ t + \varepsilon_t^4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in cl(N_1)$. Así, $\sigma_1 \in \Theta_i$ (de hecho, se puede comprobar que $\sigma_1 \in \Theta_{si}$) y, por tanto, concluimos que $\sigma \in \Theta_\infty$.

La siguiente figura ilustra gráficamente el segundo cono de momentos de un sistema σ_1 cuyos vectores de coeficientes representamos en gris. Puesto que $d(\sigma_1, \sigma) < +\infty$, cada uno de los vectores de coeficientes de σ_1 se encontrará en una bola (en $\|\cdot\|_\infty$ en la figura) de cierto radio fijo y centrada en el correspondiente vector de coeficientes de σ .

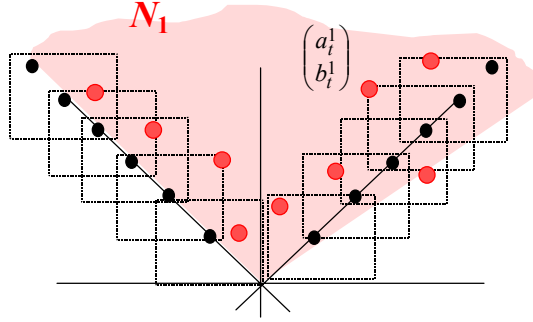


Figura 1.2: Segundo cono de momentos de σ_1 .

En términos informales, la idea que subyace en el ejemplo anterior es que el vector $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtiene a partir de restricciones con coeficientes grandes. El sistema reforzado (introducido en la sección 0.2) nos permite formalizar esta idea.

Proposición 1.2.11 Dado $\sigma \in \Theta$, se tiene que $\sigma \in \Theta_\infty$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N^R$.

Demostración. La condición “sí” ha sido establecida anteriormente (véase la observación 1.2.5). Supongamos ahora que $\sigma \in \Theta_\infty (\subset \Theta_i)$. Entonces para cada $q > 0$ el sistema $\sigma_q := \{a_t^1 x \geq b_t - q, t \in T\}$ también pertenece a Θ_i puesto que $d(\sigma, \sigma_q) < +\infty$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin N^R$ ($= N_q^R$ para cada $q > 0$, por el lema 0.3.5). Entonces, apelando al lema 1.2.7, para cada $q > 0$, existe $\rho_q \geq 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho_q \end{pmatrix} \in cl \left(conv \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t - q \end{pmatrix}, t \in T \right\} \right) \right) = cl(C) - \begin{pmatrix} 0_n \\ q \end{pmatrix},$$

y, entonces,

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho_q + q \end{pmatrix} \in cl(C).$$

Como q puede ser elegido arbitrariamente grande, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in (cl(C))_\infty = C_\infty = N^R.$$

■

En las siguientes figuras se muestran dos sistemas en Θ_∞ que bajo perturbaciones arbitrariamente pequeñas pasan de ser fuertemente inconsistentes a débilmente inconsistentes o viceversa:

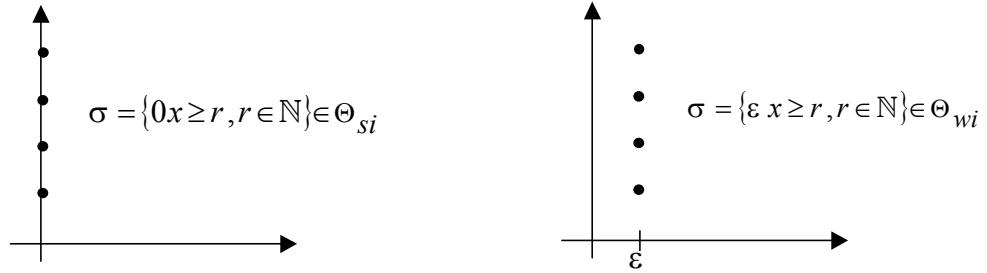


Figura 1.3: Sistema inestable en Θ_∞ .

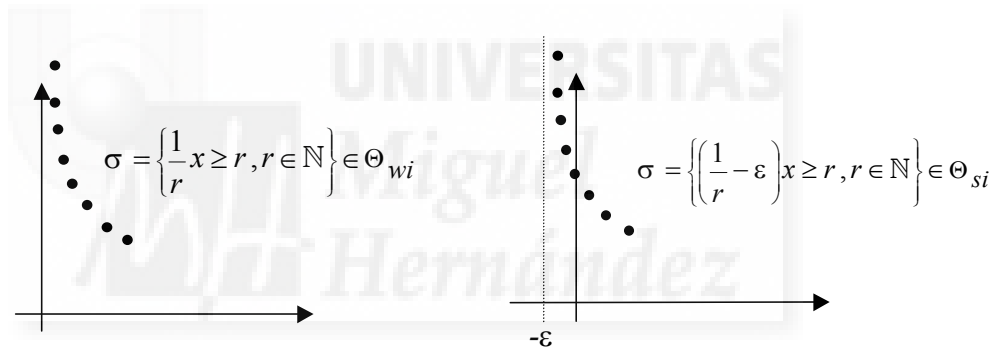


Figura 1.4: Sistema inestable en Θ_∞ .

Si nos confinamos al caso en el que los vectores de coeficientes de los sistemas son acotados (como ocurre en la PL ordinaria), entonces $N^R = \{0_{n+1}\}$ y, por tanto, $\Theta_\infty = \emptyset$. El teorema 1.2.15 muestra que, para un sistema $\sigma \in \Theta \setminus \Theta_\infty$, las condiciones “ $\sigma \in bd(\Theta_c)$ ” y “ $\sigma \in bd(\Theta_{si})$ ” resultan ser equivalentes. La primera de ellas no puede obviamente ocurrir en el caso $\sigma \in \Theta_\infty$, mientras que la segunda aún representará cierto tipo de mal planteamiento en este caso como se puede observar en las Figuras 1.3 y 1.4. Atendiendo a esta idea, en lo que sigue nos referiremos a los sistemas de $bd(\Theta_{si})$ como *sistemas mal planteados en sentido generalizado*, y la

distancia de un sistema dado a $bd(\Theta_{si})$ consistirá la *distancia al mal planteamiento generalizado*.

Con el objetivo de determinar la distancia de un sistema dado al mal planteamiento generalizado, es bastante natural pensar en utilizar el conjunto C , puesto que sus elementos tienen “tamaño similar” (en la medida en que son combinaciones convexas) al de los vectores de coeficientes originales. Por otro lado, dado $\sigma \in \Theta_c$, el teorema 0.3.1 asegura que, para todo $\rho > 0$, se tiene $\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} \notin cl(C)$. Además, si $\sigma \in int(\Theta_c)$, el teorema 0.3.3 garantiza que $0_{n+1} \notin cl(C)$ y, por tanto, $cl(C) \cap \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \emptyset$. En este sentido, el buen planteamiento de $\sigma \in \Theta_c$ está íntimamente relacionado con la posición relativa entre C y $\mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$, o, alternativamente, la posición relativa entre 0_{n+1} y $C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$, lo que motiva la siguiente definición, que constituye una pieza clave en el desarrollo de la memoria.

Definición 1.2.12 Sea $\sigma \in \Theta$. Su conjunto hipográfico asociado, denotado por H , viene dado por

$$H := C + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente teorema caracteriza la posición relativa entre un sistema dado $\sigma \in \Theta$ y $bd(\Theta_{si})$ en términos de la posición relativa entre 0_{n+1} y $bd(H)$. Los resultados que siguen a este teorema corroboran los comentarios anteriores acerca del mal planteamiento de los sistemas que pertenecen a $bd(\Theta_{si})$. Antes, establezcamos el siguiente lema.

Lema 1.2.13 Sea $\sigma \in \Theta$. Entonces, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in int(N)$ si y sólo si $0_{n+1} \in int(H)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $0_{n+1} \in int(H)$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ \varepsilon \end{pmatrix} \in int(H) \subset int(K)$. Así, haciendo uso del teorema 0.2.4, deben existir un subconjunto finito \tilde{T} de T , un escalar positivo λ_t para cada $t \in \tilde{T}$, y $\mu \geq 0$, tales que

$$span \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in \tilde{T}; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } \begin{pmatrix} 0_n \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{t \in \tilde{T}} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in \tilde{T}} \frac{\lambda_t}{\mu + \varepsilon} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},$$

y, de ahí, $\text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in \tilde{T} \right\} \right) = \mathbb{R}^{n+1}$. Así pues, apelando de nuevo al teorema 0.2.4, obtenemos $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int}(N)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int}(N)$, y de nuevo

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in \tilde{T}} \alpha_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

para algún subconjunto finito \tilde{T} de T , tal que $\text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in \tilde{T} \right\} \right) = \mathbb{R}^{n+1}$, y ciertos escalares positivos $\{\alpha_t\}_{t \in \tilde{T}}$. Siendo $\gamma := \sum_{t \in \tilde{T}} \alpha_t > 0$, (1.1) implica que

$$0_{n+1} = \sum_{t \in \tilde{T}} \frac{\alpha_t}{\gamma} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in H. \text{ Además,}$$

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix} = \sum_{t \in \tilde{T}} \frac{\alpha_t}{2\gamma} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} 0_{n+1}.$$

Puesto que, obviamente, $\text{aff} \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in \tilde{T}; 0_{n+1} \right\} \right) = \mathbb{R}^{n+1}$, el teorema 0.2.4 asegura que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix} \in \text{int} \left(\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in \tilde{T}; 0_{n+1} \right\} \right) \subset \text{int}(H),$$

donde la última inclusión es una consecuencia de que $0_{n+1} \in H$. Entonces, $0_{n+1} \in \text{int}(H) + \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \subset \text{int}(H)$. ■

Teorema 1.2.14 *Sea $\sigma \in \Theta$. Se verifican los siguientes enunciados:*

- (i) $\sigma \in \text{int}(\Theta_{si})$ si y sólo si $0_{n+1} \in \text{int}(H)$;
- (ii) $\sigma \in \text{bd}(\Theta_{si})$ si y sólo si $0_{n+1} \in \text{bd}(H)$;
- (iii) $\sigma \in \text{ext}(\Theta_{si})$ si y sólo si $0_{n+1} \in \text{ext}(H)$.

Demostración. (i) es una consecuencia inmediata del lema previo junto con el teorema 0.3.2.

(ii) Sea $\sigma \in bd(\Theta_{si})$, y tomemos una sucesión $\{\sigma_r\} \subset \Theta_{si}$ convergente a σ . Entonces, según el teorema 0.3.1, para cada $r \in \mathbb{N}$, debe existir $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix}$ y, por tanto, tomando $\gamma_r := \sum_{t \in T} \lambda_t^r > 0$, tenemos

$$0_{n+1} = \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_r} \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

lo cual implica

$$\left\| \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_r} \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} \right) \right\| \leq d(\sigma, \sigma_r).$$

En consecuencia, obtenemos que $0_{n+1} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_r} \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \in cl(H)$.

Por (i) tenemos que $0_{n+1} \notin int(H)$ y, por tanto, $0_{n+1} \in bd(H)$.

Recíprocamente, supongamos que $0_{n+1} \in bd(H)$, y tomemos una sucesión $\left\{ \begin{pmatrix} a^r \\ b^r \end{pmatrix} \right\} \subset H$ convergente a 0_{n+1} . Para cada $r \in \mathbb{N}$, podemos escribir $\begin{pmatrix} a^r \\ b^r \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu_r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ para algún $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^r = 1$, y algún $\mu_r \geq 0$. Si definimos, para cada r ,

$$\sigma_r := \left\{ (a_t - a^r)' x \geq b_t - b^r + \frac{1}{r}, t \in T \right\},$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\mu_r + \frac{1}{r}} \begin{pmatrix} a_t - a^r \\ b_t - b^r + \frac{1}{r} \end{pmatrix} \in N_r.$$

Por tanto, el teorema 0.3.1 establece que $\sigma_r \in \Theta_{si}$ para todo r y, puesto que $\{\sigma_r\}$ converge claramente a σ , obtenemos que $\sigma \in cl(\Theta_{si})$. De nuevo en virtud de (i), $\sigma \in bd(\Theta_{si})$.

(iii) es evidente a partir de (i) y (ii). ■

La siguiente figura ilustra el contenido del teorema anterior mediante los conjuntos hipográficos asociados a los mismos sistemas empleados en la Figura 0.2.

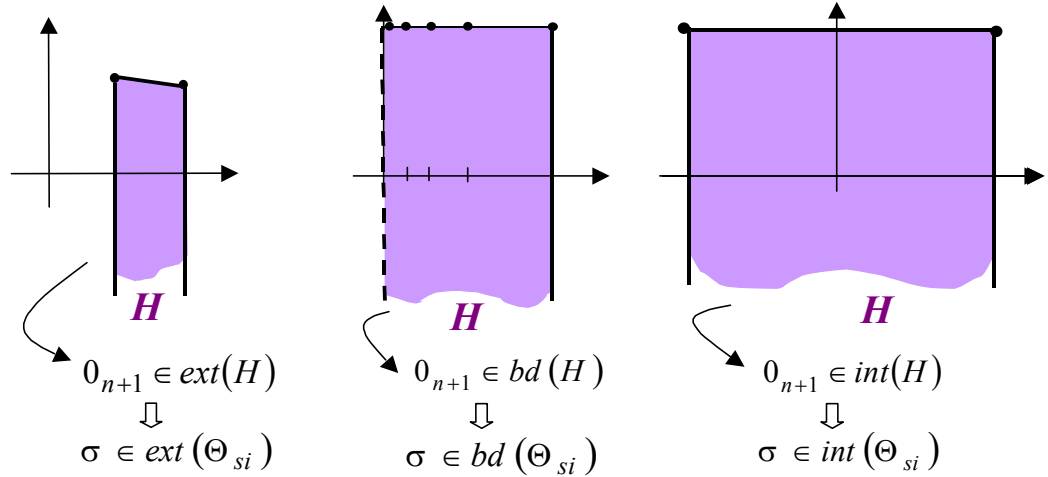


Figura 1.5: Ilustración del Teorema 1.2.14.

El siguiente teorema, junto con la proposición 1.2.17, formaliza nuestros comentarios acerca del mal planteamiento generalizado formulados en párrafos anteriores.

Teorema 1.2.15 *Dado $\sigma \in \Theta \setminus \Theta_\infty$, entonces se tiene*

- (i) $\sigma \in \text{int}(\Theta_i)$ si y sólo si $\sigma \in \text{int}(\Theta_{si})$;
- (ii) $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ si y sólo si $\sigma \in \text{ext}(\Theta_{si})$;
- (iii) $\sigma \in \text{bd}(\Theta_c)$ si y sólo si $\sigma \in \text{bd}(\Theta_{si})$.

Demostración. (i) La condición “si” es trivial, pues $\Theta_{si} \subset \Theta_i$. Ahora supongamos que $\sigma \in \text{int}(\Theta_i)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ de manera que $d(\sigma_1, \sigma) < \varepsilon$ implique $\sigma_1 \in \Theta_i$. En particular, el sistema

$$\sigma_{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} := \{(a_t + a)'x \geq b_t + b, t \in T\}$$

pertenece a Θ_i siempre que $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$. Entonces tenemos que $\sigma_{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \in \Theta_i \setminus \Theta_\infty$. Por el lema 1.2.7 existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} \in cl \left(conv \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, t \in T \right\} \right) \right) = cl(C) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \in cl(C) + \rho \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \subset cl(H) \text{ para todo } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \varepsilon B.$$

Así, $0_{n+1} \in int(cl(H)) = int(H)$ (véase el teorema 0.2.3). Entonces, aplicamos el teorema 1.2.14(i) para concluir que $\sigma \in int(\Theta_{si})$.

(ii) La condición “sólo si” es evidente. Con el fin de establecer el recíproco, supongamos que $\sigma \in ext(\Theta_{si})$ y entonces, por el teorema 1.2.14, $0_{n+1} \in ext(H)$, en particular $0_{n+1} \notin cl(C)$. Si vemos que $\sigma \in \Theta_c$, entonces el teorema 0.3.3 asegurará que $\sigma \in int(\Theta_c)$. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $\sigma \in \Theta_i$. Entonces, el lema 1.2.7 conduce a que $\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} \in cl(C)$, para cierto $\rho \geq 0$, y entonces

$$0_{n+1} \in cl(C) + \rho \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \subset cl(H),$$

obteniendo la contradicción buscada.

(iii) es una consecuencia inmediata de (i) y (ii). ■

Corolario 1.2.16 *Se tiene:*

- (i) $int(\Theta_{wi}) \subset \Theta_\infty$;
- (ii) $\Theta_{wi} \cap (\Theta \setminus \Theta_\infty) \subset bd(\Theta_c)$.

Demostración. (i) Se tiene que

$$int(\Theta_{wi}) \cap (\Theta \setminus \Theta_\infty) \subset (int(\Theta_i) \setminus int(\Theta_{si})) \cap (\Theta \setminus \Theta_\infty) = \emptyset.$$

(ii) Simplemente obsérvese que Θ_{wi} es disjunto de $int(\Theta_{si}) \cup int(\Theta_c)$. ■

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del hecho de que $\Theta_\infty \subset \Theta_i$.

Proposición 1.2.17 *Dado $\sigma \in \Theta_\infty$, se tiene que*

- (i) $\sigma \in \text{int}(\Theta_{wi})$ si y sólo si $\sigma \in \text{ext}(\Theta_{si})$;
- (ii) $\sigma \in \text{ext}(\Theta_{wi})$ si y sólo si $\sigma \in \text{int}(\Theta_{si})$;
- (iii) $\sigma \in \text{bd}(\Theta_{wi})$ si y sólo si $\sigma \in \text{bd}(\Theta_{si})$.

1.3 Distancia al mal planteamiento generalizado

El siguiente lema nos permitirá establecer la expresión deseada para la distancia $d(\sigma, \text{bd}(\Theta_{si}))$ y será también de utilidad en el resto del trabajo.

Lema 1.3.1 *Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto de índices arbitrario y sean $X := \{x^s, s \in S\}$ e $Y := \{y^s, s \in S\}$ dos subconjuntos de \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$, tales que $\sup_{s \in S} \|x^s - y^s\| \leq \varepsilon$ para cierto $\varepsilon \geq 0$. Se tiene:*

- (i) *Si $\rho \text{cl}(B) \subset \text{cl}(\text{conv}(X))$ para algún $\rho \geq \varepsilon$, entonces*

$$(\rho - \varepsilon) \text{cl}(B) \subset \text{cl}(\text{conv}(Y)).$$

- (ii) *Si $\rho \text{cl}(B) \cap \text{cl}(\text{conv}(X)) = \emptyset$ para algún $\rho \geq \varepsilon$, entonces*

$$(\rho - \varepsilon) \text{cl}(B) \cap \text{cl}(\text{conv}(Y)) = \emptyset.$$

En consecuencia, si $d(0_k, \text{cl}(\text{conv}(X))) \geq \rho \geq \varepsilon$, entonces $d(0_k, \text{cl}(\text{conv}(Y))) \geq \rho - \varepsilon$.

Demostración. Veamos en primer lugar (i). Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $\sup_{s \in S} \|x^s - y^s\| \leq \varepsilon$ para cierto $\varepsilon \geq 0$, y que existen $\rho \geq \varepsilon$ y $z \in (\rho - \varepsilon) \text{cl}(B) \setminus \text{cl}(\text{conv}(Y))$. Entonces z y $\text{cl}(\text{conv}(Y))$ se pueden separar

estrictamente, y por tanto, existe $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$ tal que

$$z'u < v \quad \text{e} \quad (y^s)'u \geq v, \quad \text{para todo } s \in S. \quad (1.2)$$

Sea $w \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\}$ tal que $w'u = \|w\| \|u\|_*$ y $\|w\| = \varepsilon$ (véase el lema 0.2.2). Entonces tenemos $\|z - w\| \leq \|z\| + \|w\| \leq \rho y$, por tanto, $z - w \in cl(conv(X))$. Esto implica la existencia de una sucesión $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(S)}$, con $\sum_{s \in S} \lambda_s^r = 1$ para todo r , tal que

$$z - w = \lim_r \sum_{s \in S} \lambda_s^r x^s = \lim_r \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s^r y^s + \sum_{s \in S} \lambda_s^r (x^s - y^s) \right\}.$$

Así, multiplicando escalarmente por u , y apelando a (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} z'u - w'u &= \lim_r \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s^r (y^s)'u + \sum_{s \in S} \lambda_s^r (x^s - y^s)'u \right\} \\ &\geq v - \sup_{s \in S} \|x^s - y^s\| \|u\|_* \geq v - \varepsilon \|u\|_*. \end{aligned}$$

Por otra parte, la elección de z nos lleva a la contradicción

$$z'u - w'u < v - \|w\| \|u\|_* = v - \varepsilon \|u\|_*.$$

Veamos ahora (ii). Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $\sup_{s \in S} \|x^s - y^s\| \leq \varepsilon$ para cierto $\varepsilon \geq 0$, y que existen $\rho \geq \varepsilon$ e $y \in (\rho - \varepsilon) cl(B) \cap cl(conv(Y))$. Entonces $\|y\| \leq \rho - \varepsilon$ y existe una sucesión $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(S)}$, con $\sum_{s \in S} \lambda_s^r = 1$ para todo r , tal que $y = \lim_r \sum_{s \in S} \lambda_s^r y^s$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ definimos $\bar{y}^r := \sum_{s \in S} \lambda_s^r y^s$ y $\bar{x}^r := \sum_{s \in S} \lambda_s^r x^s \in conv(X)$. Como $\{\bar{y}^r\}$ converge a y , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|\bar{y}^r - y\| \leq \frac{1}{r}$, además

$$\|\bar{x}^r - \bar{y}^r\| \leq \sum_{s \in S} \lambda_s^r \|x^s - y^s\| \leq \varepsilon,$$

por tanto

$$\|\bar{x}^r\| \leq \|\bar{y}^r\| + \|\bar{x}^r - \bar{y}^r\| \leq \|y\| + \|\bar{y}^r - y\| + \|\bar{x}^r - \bar{y}^r\| \leq \rho + \frac{1}{r},$$

y así la sucesión $\{\bar{x}^r\}$ está acotada y podemos entonces suponer sin pérdida de generalidad que converge a un cierto x con $\|x\| \leq \rho$, con lo cual tendríamos que $x \in \rho cl(B) \cap cl(conv(X))$ y esto es una contradicción.

Obsérvese por último que si $d(0_k, cl(conv(X))) \geq \rho > \varepsilon$, tomando $0 < \delta < \rho - \varepsilon$, tenemos que $(\rho - \delta) cl(B) \cap cl(conv(X)) = \emptyset$ y la parte anterior establece entonces que $(\rho - \delta - \varepsilon) cl(B) \cap cl(conv(Y)) = \emptyset$. Como $\delta \in]0, \rho - \varepsilon[$ es arbitrario, se concluye pues que $d(0_k, cl(conv(Y))) \geq \rho - \varepsilon$. El caso $\rho = \varepsilon$ es trivial. ■

Como consecuencia inmediata del lema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.2 Sean $\sigma, \sigma_1 \in \Theta$ tales que $d(\sigma_1, \sigma) \leq \varepsilon$ para cierto $\varepsilon \geq 0$. Se tiene:

- (i) Si $\rho cl(B) \subset cl(H)$ para algún $\rho \geq \varepsilon$, entonces $(\rho - \varepsilon) cl(B) \subset cl(H_1)$. En particular, si $H = \mathbb{R}^{n+1}$ y $d(\sigma_1, \sigma) < +\infty$, entonces $H_1 = \mathbb{R}^{n+1}$.
- (ii) Si $d(0_{n+1}, cl(H)) \geq \rho \geq \varepsilon$, entonces $d(0_{n+1}, cl(H_1)) \geq \rho - \varepsilon$.

Demostración. Tómnese en el lema anterior $S := T \times [0, +\infty[$,

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t - \mu \end{pmatrix}, t \in T, \mu \in [0, +\infty[\right\} \text{ e } Y := \left\{ \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 - \mu \end{pmatrix}, t \in T, \mu \in [0, +\infty[\right\}.$$

Así, $cl(conv(X)) = cl(H)$ y $cl(conv(Y)) = H_1$.

En el caso particular en que $H = \mathbb{R}^{n+1}$, y $d(\sigma_1, \sigma) = k < +\infty$, fijamos un $\alpha > 0$ arbitrario. Entonces, poniendo $\rho = \alpha + k$, obtenemos $\alpha cl(B) \subset cl(H_1)$. Como α ha sido elegido arbitrariamente, tenemos $H_1 = \mathbb{R}^{n+1}$. ■

Teorema 1.3.3 Sea $\sigma \in \Theta$. Entonces

$$d(\sigma, bd(\Theta_{si})) = d(0_{n+1}, bd(H)).$$

Demostración. Si $H = \mathbb{R}^{n+1}$ entonces el miembro derecho de la fórmula anterior es igual a $+\infty$. En este caso, dado cualquier $\sigma_1 \in \Theta$ tal que $d(\sigma_1, \sigma) < +\infty$, el corolario anterior asegura que $H_1 = \mathbb{R}^{n+1}$ y, en particular, $0_{n+1} \in \text{int}(H_1)$, con lo que el teorema 1.2.14 implica que $\sigma_1 \in \text{int}(\Theta_{si})$. Por tanto $d(\sigma, \text{bd}(\Theta_{si})) = +\infty$.

Supongamos ahora que $H \neq \mathbb{R}^{n+1}$. Por el carácter cerrado (y no vacío) de $\text{bd}(H)$, $d(0_{n+1}, \text{bd}(H))$ se alcanza en cierto $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{bd}(H)$.

Veamos ahora que $d(\sigma, \text{bd}(\Theta_{si})) \leq \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|$. El hecho de que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{bd}(H)$ implica que

$$0_{n+1} \in \text{bd}\left(H - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \text{bd}\left(H_{\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}}\right),$$

siendo $H_{\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}}$ el conjunto hipográfico asociado a $\sigma_{\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}} = \{(a_t - a)'x \geq b_t - b, t \in T\}$. Por lo tanto, el teorema 1.2.14 asegura que $\sigma_{\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}} \in \text{bd}(\Theta_{si})$, y puesto que $d\left(\sigma, \sigma_{\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}}\right) = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|$, obtenemos la desigualdad deseada.

Para establecer la desigualdad contraria, supongamos, procediendo por reducción al absurdo, que existe $\sigma_1 \in \text{bd}(\Theta_{si})$ tal que $d(\sigma, \sigma_1) = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| - \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Distinguimos dos casos: $0_{n+1} \in \text{int}(H)$ y $0_{n+1} \in \text{ext}(H)$. Si $0_{n+1} \in \text{int}(H)$ sería $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \text{cl}(B) \subset \text{cl}(H)$ y el apartado (i) del corolario anterior establecería entonces que $\varepsilon \text{cl}(B) \subset \text{cl}(H_1)$ y por tanto $0_{n+1} \in \text{int}(H_1)$. Así, en virtud del teorema 1.2.14 sería $\sigma_1 \in \text{int}(\Theta_{si})$ lo cual es una contradicción. En el caso en que $0_{n+1} \in \text{ext}(H)$, tendríamos que $d(0_{n+1}, \text{cl}(H)) = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|$, y ahora, el apartado (ii) del corolario anterior establecería que $d(0_{n+1}, \text{cl}(H_1)) \geq \varepsilon$, esto es, $0_{n+1} \in \text{ext}(H_1)$. Utilizando de nuevo el teorema 1.2.14 obtendríamos $\sigma_1 \in \text{ext}(\Theta_{si})$ que también es una contradicción. ■

Observación 1.3.4 El teorema que acabamos de establecer no sólo proporciona una fórmula para la distancia al mal planteamiento, sino que nos indica cómo obtener sistemas mal planteados a dicha distancia (cuando es finita) del sistema nominal. Resulta destacable el hecho de que la perturbación requerida para ello se obtenga sumando un vector constante, $-\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, a los vectores de coeficientes de σ . Otro aspecto destacable del teorema anterior es que, como ya apuntábamos en la

introducción de este capítulo, establece la igualdad entre una distancia en el espacio paramétrico Θ y una distancia en el espacio \mathbb{R}^{n+1} .

El Capítulo 4 en [21] se ocupa de la consistencia de los sistemas del tipo $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ asociados a (0.1). Ahora, a modo de ilustración, aplicaremos el teorema 1.3.3 con el fin de calcular la distancia al mal planteamiento generalizado para una familia de sistemas semi-infinitos consistentes allí analizados (véase [21, Ejercicio 4.2]).

Ejemplo 1.3.5 Consideremos la familia de sistemas en \mathbb{R}^2 dada por

$$\sigma(\mu) := \{-e^t x_1 + x_2 \geq (1-t)e^t, t \in \mathbb{R}; -\mu x_1 - x_2 \geq 0\},$$

donde $\mu > 0$. Puede demostrarse fácilmente que, para $\mu > 0$, $\sigma(\mu)$ es consistente. De hecho, su conjunto factible es la intersección del epigrafo de la función $x_1 \mapsto e^{x_1}$ y el hipografo de $x_1 \mapsto -\mu x_1$. Asumamos que la norma utilizada en (0.2) es la norma euclídea de \mathbb{R}^3 . Veamos que

$$d(\sigma(\mu), bd(\Theta_{si})) = \frac{\mu}{\sqrt{4 + \mu^2}}.$$

Para ello nótese que

$$C(\mu) = conv(\{(-s, 1, h(s))', s > 0; (-\mu, -1, 0)'\}),$$

donde $h(s) := (1 - \log s)s$ para $s > 0$. Puesto que h es cóncava, cada punto del conjunto hipográfico de $\sigma(\mu)$, $H(\mu)$, es una combinación convexa de un elemento de la forma $(-s, 1, h(s))'$ y un punto de $(-\mu, -1, 0)' + \mathbb{R}_+(0, 0, -1)'$. Por tanto, se puede comprobar fácilmente que $d(0_3, bd(H(\mu)))$ se alcanza en algún punto del segmento determinado por $(0, 1, h(0))'$ (definiendo $h(0) = 0$) y $(-\mu, -1, 0)'$, y obtenemos la expresión deseada de $d(\sigma(\mu), bd(\Theta_{si}))$.

Veamos ahora algunos otros ejemplos (todos ellos de PL ordinaria) donde se calcula la distancia $d(\sigma, bd(\Theta_{si}))$, así como sistemas “mal planteados” donde se alcanza dicha distancia.

Ejemplo 1.3.6 Consideremos el sistema dado por $\sigma := \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Su conjunto factible y su conjunto hipográfico tienen el siguiente aspecto:

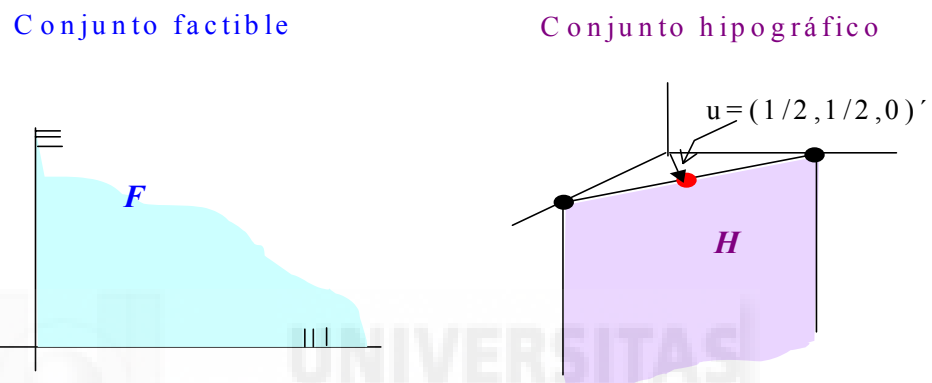


Figura 1.6: Conjuntos factible e hipográfico de σ .

La distancia (en $\|\cdot\|_\infty$) al mal planteamiento se alcanza en el siguiente sistema

$$\sigma_{-u} := \left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{2})x_1 + (0 - \frac{1}{2})x_2 \geq 0, \\ (0 - \frac{1}{2})x_1 + (1 - \frac{1}{2})x_2 \geq 0 \end{array} \right\},$$

cuyo conjunto factible es la bisectriz del primer y tercer cuadrante

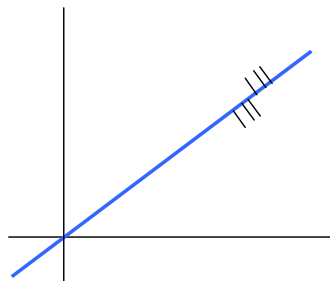


Figura 1.7: Conjunto factible de σ_{-u} .

Ejemplo 1.3.7 Consideremos ahora el sistema $\sigma := \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 1\}$. Su conjunto factible y su conjunto hipográfico son de la forma

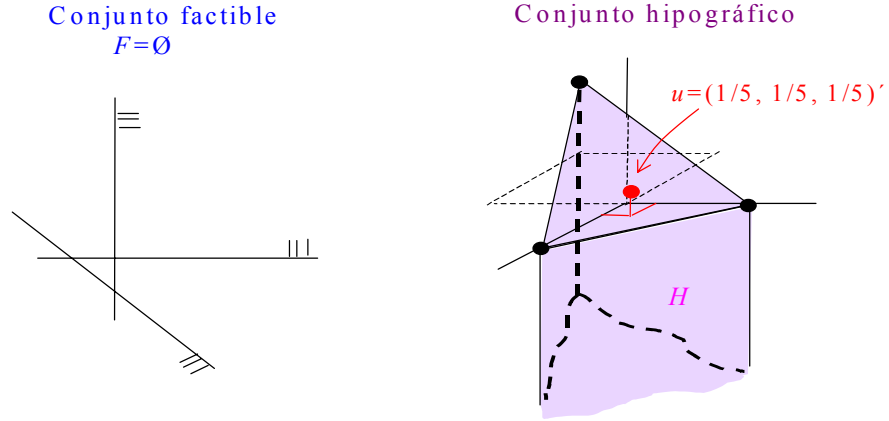


Figura 1.8: Conjuntos factible e hipográfico de σ .

En este caso $d(0_3, bd(H))$ puede calcularse como el mínimo de las distancias a las caras de H . Si la norma considerada es $\|\cdot\|_\infty$, esto puede hacerse resolviendo un problema de PL ordinaria para cada una de dichas caras. Así, la distancia (con respecto a $\|\cdot\|_\infty$) al mal planteamiento se alcanza en el siguiente sistema

$$\sigma_{-u} := \left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{5})x_1 + (0 - \frac{1}{5})x_2 \geq 0 - \frac{1}{5}, \\ (0 - \frac{1}{5})x_1 + (1 - \frac{1}{5})x_2 \geq 0 - \frac{1}{5}, \\ (-1 - \frac{1}{5})x_1 + (-1 - \frac{1}{5})x_2 \geq 1 - \frac{1}{5} \end{array} \right\},$$

donde $u = (1/5, 1/5, 1/5)$, y cuyo conjunto factible está formado únicamente por el punto $(-1/3, -1/3)'$.

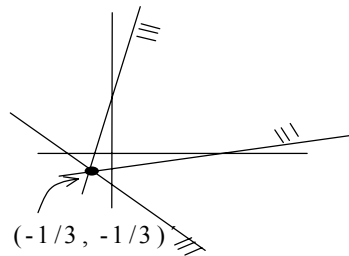


Figura 1.9: Conjunto factible de σ_{-u} .

Por último presentamos un ejemplo en el que la distancia al mal planteamiento generalizado se puede alcanzar, simultáneamente, tanto en sistemas consistentes como en débilmente inconsistentes o fuertemente inconsistentes.

Ejemplo 1.3.8 Consideremos el sistema en \mathbb{R}

$$\sigma := \{(-\cos t)x_1 \geq \sin t, t \in [0, \pi/2] ; x_1 \geq 1\}.$$

Asumamos que la norma utilizada en (0.2) es la norma euclídea de \mathbb{R}^2 . Se puede comprobar fácilmente que $d(\sigma, bd(\Theta_{si})) = 1$, y se alcanza, por ejemplo, en $\sigma_1 := \sigma_{\binom{0}{-1}} \in \Theta_c$, $\sigma_2 := \sigma_{\binom{1}{0}} \in \Theta_{wi}$, y $\sigma_3 := \sigma_{\binom{-1}{0}} \in \Theta_{si}$, donde, como en párrafos anteriores, $\sigma_{\binom{a}{b}}$ es el sistema que se obtiene de sumar $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a cada vector de coeficientes de σ .

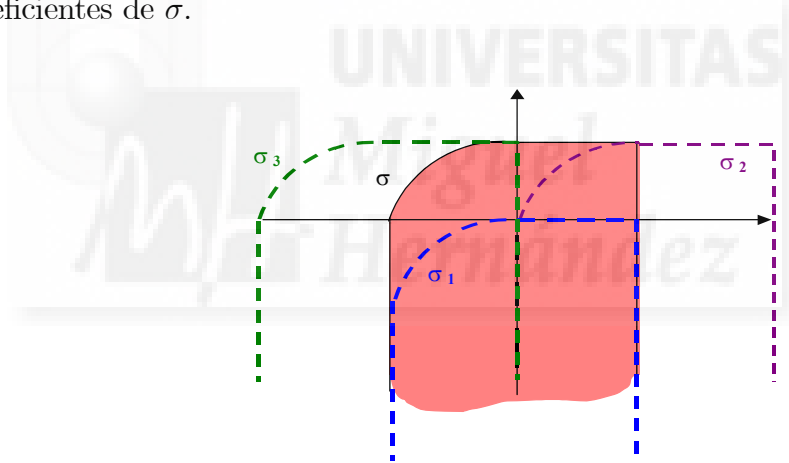


Figura 1.10: Sistemas mal planteados equidistantes de σ .

La siguiente figura resume la estructura de nuestro espacio paramétrico Θ en relación con el mal planteamiento generalizado. Θ se puede dividir en tres bloques. El primero de ellos corresponde a $\Theta \setminus \Theta_\infty$, en el que el mal planteamiento generalizado, $bd(\Theta_{si})$, coincide con el mal planteamiento ordinario, $bd(\Theta_c)$. El segundo bloque consta de aquellos sistemas de Θ_∞ cuya distancia al mal planteamiento generalizado es finita. El último bloque corresponde a aquellos sistemas cuya distancia

al mal planteamiento generalizado es infinita, los cuales, están caracterizados por la condición $H = \mathbb{R}^{n+1}$, como deducimos del teorema 1.3.3.

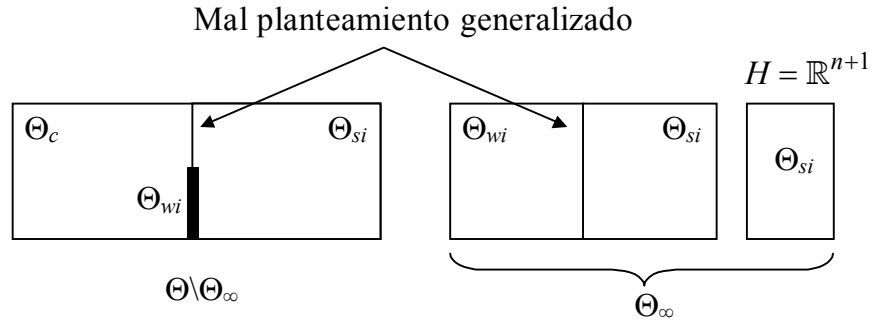


Figura 1.11: Esquema del espacio paramétrico de los sistemas en relación con el mal planteamiento generalizado.

1.4 Valor de consistencia

En esta sección la distancia de un sistema dado, σ , a $bd(\Theta_c)$ (“mal planteamiento ordinario”) se determina en términos de su *valor de consistencia*, el cual se introduce en la siguiente definición. Las expresiones proporcionadas por el teorema 1.4.3 serán fundamentales para algunas de las aplicaciones presentadas en el Capítulo 3. En concreto, el lema 3.2.1 (resultado técnico clave en §3.2) combina las dos expresiones de la “distancia al mal planteamiento” dadas en los teoremas 1.3.3 y 1.4.3, respectivamente. Nótese que ambas expresiones son de naturaleza distinta y obedecen a una metodología diferente.

Definición 1.4.1 *El valor de consistencia de $\sigma \in \Theta$, denotado por κ , viene dado por*

$$\kappa := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{t \in T} \frac{a'_t x - b_t}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}.$$

Observación 1.4.2 Un argumento estándar proporciona

$$\kappa = \sup \left\{ \frac{\rho}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \mid a'_t x - b_t \geq \rho \text{ para todo } t \in T, \begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

Una posible interpretación del valor de consistencia es la siguiente: considérese $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ y sea \bar{x} un SS-elemento de σ con holgura $\rho > 0$ (véase el teorema 0.3.3). En estas condiciones, si $\sigma_1 = \{(a_t^1)' x \geq b_t^1, t \in T\} \in \Theta$ y $d(\sigma_1, \sigma) \leq \frac{\rho}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}$, entonces \bar{x} es un punto factible de σ_1 y por tanto $\sigma_1 \in \Theta_c$. En efecto, para todo $t \in T$ se tiene

$$\begin{aligned} (a_t^1)' \bar{x} - b_t^1 &= \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\geq \rho - d(\sigma_1, \sigma) \left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \geq 0. \end{aligned}$$

Este argumento prueba que $d(\sigma, \Theta_i) \geq \kappa$ para $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$. El siguiente teorema va más allá, proporcionando $d(\sigma, \text{bd}(\Theta_c))$ para todo $\sigma \in \Theta$. A lo largo de la prueba pueden encontrarse motivaciones alternativas para la definición de κ .

Teorema 1.4.3 Sea $\sigma \in \Theta$. Las siguientes afirmaciones se verifican:

- (i) Si $\sigma \in \Theta_c$, entonces $d(\sigma, \Theta_i) = \kappa$;
- (ii) Si $\sigma \in \Theta_i$, entonces $d(\sigma, \Theta_c) = -\kappa$.

Demostración. (i) Con el objetivo de establecer $d(\sigma, \Theta_i) \geq \kappa$, tomemos cualquier $\mu < \kappa$. Así pues, debe existir $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\inf_{t \in T} \left\{ \frac{a'_t \bar{x} - b_t}{\left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \right\} \geq \mu$; i.e., $a'_t \bar{x} - b_t \geq \mu \left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*$ para todo $t \in T$. Dado $\sigma_1 \in \Theta_i$ tendremos $(a_{t_0}^1)' \bar{x} - b_{t_0}^1 < 0$ para algún $t_0 \in T$ y, entonces,

$$\begin{aligned} 0 &> a'_{t_0} \bar{x} - b_{t_0} + (a_{t_0}^1 - a_{t_0})' \bar{x} - (b_{t_0}^1 - b_{t_0}) \\ &\geq \mu \left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* - \left\| \begin{pmatrix} a_{t_0}^1 \\ b_{t_0}^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{t_0} \\ b_{t_0} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \geq \left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* (\mu - d(\sigma, \sigma_1)). \end{aligned}$$

Así, $d(\sigma, \sigma_1) > \mu$ para cualquier $\mu < \kappa$ y cualquier $\sigma_1 \in \Theta_i$. Por lo tanto, $d(\sigma, \Theta_i) \geq \kappa$.

Ahora, probemos la desigualdad contraria. En primer lugar, obsérvese que la consistencia de σ implica de forma obvia la existencia de un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'_t x - b_t \geq 0$, para todo $t \in T$, y, entonces, $\kappa \geq 0$. Además, el párrafo anterior asegura que $\kappa < +\infty$ (véase observación 1.2.4). Para establecer la desigualdad deseada, dado $\varepsilon > 0$ construiremos un sistema $\sigma_\varepsilon \in cl(\Theta_i)$ tal que $d(\sigma, \sigma_\varepsilon) \leq \kappa + \varepsilon$. Así tendremos que $d(\sigma, \Theta_i) \leq \kappa + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Apelando pues a la observación 1.4.2, no puede existir $\begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ verificando

$$\begin{cases} a'_t x - \rho \geq b_t, & t \in T, \\ \frac{\rho}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \geq \kappa + \varepsilon \text{ (o equivalentemente } \left\| \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \leq 1, \text{ con } \rho > 0). \end{cases} \quad (1.3)$$

Entonces, teniendo en cuenta el lema 0.2.1, el sistema, cuya incógnita es $\begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{cases} a'_t x - \rho \geq b_t, & t \in T, \\ v'x + \frac{1}{\kappa + \varepsilon} \rho \geq w, & \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B), \end{cases} \quad (1.4)$$

ha de ser inconsistente. En caso contrario, si $\begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix}$ fuese una solución factible de (1.4), podríamos obtener $\rho > 0$ (nótese que $\rho \leq 0$ implicaría $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \geq 0$ para todo $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B)$ lo cual no puede ocurrir por la simetría de la bola B) y, así,

$$-\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' \left(\frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right) \leq 1 \text{ para todo } \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B),$$

y teniendo en cuenta de nuevo la simetría de B , el lema 0.2.1 nos conduciría a que $\begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix}$ sería una solución factible de (1.3).

Apelando de nuevo al teorema 0.3.1 se tiene

$$\begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} \in cl \left(cone \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} v \\ 1/(\kappa + \varepsilon) \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B) \right\} \right) \right),$$

y, por tanto, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \\ b_t \end{pmatrix} + \sum_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B)} \gamma_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}^r \begin{pmatrix} (\kappa + \varepsilon)v \\ 1 \\ (\kappa + \varepsilon)w \end{pmatrix} \right\} \quad (1.5)$$

para ciertas sucesiones $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\{\gamma^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(bd(B))}$. Obsérvese en este punto que, escribiendo $\beta_r := \sum_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B)} \gamma_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}^r$, $r = 1, 2, \dots$, la sucesión $\{\beta_r\}$ no puede converger a cero ya que, en otro caso, la expresión que se obtiene de (1.5) eliminando la $(n + 1)$ -ésima coordenada, junto con la acotación de $bd(B)$, implicaría $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$ y, por tanto, la inconsistencia de σ , lo cual constituye una contradicción. Así pues, la sucesión $\{\beta_r\}$ tiene una subsucesión, que denotaremos de la misma forma para abreviar, tal que $\beta_r > 0$ para todo r y $\{1/\beta_r\}$ converge a cierto $z \geq 0$. Escribiendo, para cada $r \in \mathbb{N}$, $\tilde{\gamma}_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}^r := \frac{\gamma_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}^r}{\beta_r}$, para todo $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B)$, y $\tilde{\lambda}_t^r := \frac{\lambda_t^r}{\beta_r}$, para todo $t \in T$, (1.5) conduce a

$$\begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ z \end{pmatrix} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \\ b_t \end{pmatrix} + \sum_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in bd(B)} \tilde{\gamma}_{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}^r \begin{pmatrix} (\kappa + \varepsilon)v \\ 1 \\ (\kappa + \varepsilon)w \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.6)$$

Por otra parte, puesto que, para cada $r \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\left\| \sum_{\binom{v}{w} \in bd(B)} \tilde{\gamma}_{\binom{v}{w}}^r \binom{v}{w} \right\| \leq \sum_{\binom{v}{w} \in bd(B)} \tilde{\gamma}_{\binom{v}{w}}^r = 1,$$

podemos suponer sin pérdida de generalidad (considerando una subsucesión adecuada, si fuera necesario) que la sucesión $\left\{ \sum_{\binom{v}{w} \in bd(B)} \tilde{\gamma}_{\binom{v}{w}}^r \binom{v}{w} \right\}_{r=1}^{\infty}$ converge a cierto $\binom{\tilde{v}}{\tilde{w}} \in cl(B)$. Ahora, observando la $(n+1)$ -ésima coordenada en (1.6), concluimos que

$$\lim_r \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t^r = 1; \quad (1.7)$$

y observando el resto de coordenadas, tenemos

$$\binom{0_n}{z} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t^r \left(\binom{a_t}{b_t} + (\kappa + \varepsilon) \binom{\tilde{v}}{\tilde{w}} \right) \right\}, \quad (1.8)$$

donde hemos utilizado (1.7). Consideremos el sistema σ_ε definido por

$$\sigma_\varepsilon := \left\{ (a_t + (\kappa + \varepsilon)\tilde{v})'x \geq b_t + (\kappa + \varepsilon)\tilde{w}, t \in T \right\}.$$

Es evidente que $d(\sigma, \sigma_\varepsilon) \leq \kappa + \varepsilon$.

Finalmente, concluiremos que $\sigma_\varepsilon \in cl(\Theta_i)$, lo que, en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15, junto con el hecho de que $\sigma_\varepsilon \in \Theta \setminus \Theta_\infty$, es equivalente a $0_{n+1} \in cl(H_\varepsilon)$, y esto último es una consecuencia inmediata de (1.7) y (1.8).

(ii) Sea $\sigma \in \Theta_i$, lo que implica que $\kappa \leq 0$. Empezamos por establecer la desigualdad $d(\sigma, \Theta_c) \leq -\kappa$ ($= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{t \in T} \frac{b_t - a_t'x}{\left\| \binom{x}{-1} \right\|_*}$), la cual es cierta trivialmente cuando $\kappa = -\infty$. Por tanto, suponemos $-\infty < \kappa$. Tómesese $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sup_{t \in T} \{b_t - a_t'\bar{x}\} < +\infty$. Sea $z \in bd(B)$ verificando $z' \binom{\bar{x}}{-1} = \left\| \binom{\bar{x}}{-1} \right\|_*$ (véase

el lema 0.2.2), y sea

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \frac{\sup_{t \in T} \{b_t - a'_t \bar{x}\}}{\left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} z.$$

De este modo, se puede comprobar fácilmente que \bar{x} es un punto factible del sistema

$$\sigma_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} := \{(a_t + u)' x \geq b_t + v, t \in T\}$$

y, en particular, $\sigma_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} \in \Theta_c$. Así,

$$d(\sigma, \Theta_c) \leq d(\sigma, \sigma_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}) = \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| = \sup_{t \in T} \frac{b_t - a'_t \bar{x}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}.$$

Puesto que esta desigualdad es cierta para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sup_{t \in T} \{b_t - a'_t \bar{x}\} < +\infty$ (y, por tanto, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$), concluimos la desigualdad que queríamos obtener.

Con el fin de establecer que $d(\sigma, \Theta_c) \geq -\kappa$, tomamos $\sigma_1 \in \Theta_c$. Entonces existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{t \in T} \{(a_t^1)' \bar{x} - b_t^1\} \leq \inf_{t \in T} \left\{ a'_t \bar{x} - b_t + \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 - a_t \\ b_t^1 - b_t \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \right\} \\ &\leq \inf_{t \in T} \{a'_t \bar{x} - b_t\} + d(\sigma, \sigma_1) \left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$d(\sigma, \sigma_1) \geq \sup_{t \in T} \left\{ \frac{b_t - a'_t \bar{x}}{\left\| \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \right\} \geq -\kappa.$$

Como esta desigualdad es cierta para cada $\sigma_1 \in \Theta_c$, tenemos $d(\sigma, \Theta_c) \geq -\kappa$. ■

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema anterior. La segunda afirmación también utiliza el corolario 1.2.3.

Corolario 1.4.4 *Dado $\sigma \in \Theta$, se tiene*

- (i) $\kappa = d(\sigma, \Theta_i) - d(\sigma, \Theta_c)$;
- (ii) $d(\sigma, bd(\Theta_c)) = |\kappa|$.

Este resultado implica también el siguiente:

Corolario 1.4.5 *Dado $\sigma \in \Theta$, se tiene:*

- (i) $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ si y sólo si $\kappa > 0$;
- (ii) $\sigma \in \text{int}(\Theta_i)$ si y sólo si $\kappa < 0$;
- (iii) $\sigma \in \text{bd}(\Theta_c)$ si y sólo si $\kappa = 0$.

1.5 Sistemas lineales cónicos en el caso finito

El trabajo de Freund y Vera [19] trata con un sistema lineal cónico de la forma

$$\begin{aligned} \delta : \quad & b - Ax \in C_Y, \\ & x \in C_X, \end{aligned} \tag{1.9}$$

representado por $\delta = (A, b)$, donde $C_X \subset X$ y $C_Y \subset Y$ son conos convexos cerrados en los correspondientes espacios normados X (n -dimensional) e Y (m -dimensional), cuyas normas denotaremos indistintamente por $\|\cdot\|$. En este contexto $b \in Y$ y $A : X \rightarrow Y$ es un operador lineal (continuo), con norma $\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid \|x\| \leq 1\}$. El espacio paramétrico de los sistemas (1.9) (donde C_X y C_Y permanecen fijos) está provisto de la norma

$$\|\delta\| = \|(A, b)\| := \max\{\|A\|, \|b\|\}. \tag{1.10}$$

Para un sistema dado δ , [19] presenta diferentes problemas de optimización, cada uno de cuyos valores óptimos proporciona o bien la distancia exacta al mal planteamiento, denotada por $\rho(\delta)$, o bien una aproximación de $\rho(\delta)$ entre ciertas constantes.

Ahora, consideremos el sistema de desigualdades lineales finito

$$\sigma := \{a'_i x \geq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}\}, \tag{1.11}$$

el cual es obviamente un caso particular del sistema asociado a (0.1), y consideremos la distancia (0.2) asociada a la norma de Chebyshev, $\|\cdot\|_\infty$,

$$d(\sigma_1, \sigma) := \max_{1 \leq i \leq m} \left\| \begin{pmatrix} a_i^1 \\ b_i^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|_\infty. \quad (1.12)$$

Supongamos que \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n están equipados respectivamente con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$. Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa la matriz cuya i -ésima fila es a'_i , $1 \leq i \leq m$, es bien sabido que la norma de A , vista como un operador lineal $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$, es

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i\|_\infty. \quad (1.13)$$

Por otra parte, el sistema (1.11) se puede escribir en la forma (1.9). Basta considerar $X := \mathbb{R}^n$, $Y := \mathbb{R}^m$, la matriz A del párrafo anterior, el vector $b := (b_1, \dots, b_m)' \in \mathbb{R}^m$, y los conos $C_X := \mathbb{R}^n$ y $C_Y := \mathbb{R}_-^m$, donde $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$. Además, escribiendo $\delta := (A, b)$, tenemos, por (1.10) y (1.13), que

$$\|\delta\| = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i\|_\infty, \max_{1 \leq i \leq m} |b_i| \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|_\infty.$$

Así pues, la expresión anterior asegura que, cuando ponemos el sistema (1.11) en la forma (1.9), con los conos y normas indicados, el valor de la distancia al mal planteamiento coincide en ambos contextos, el cónico de [19] y el de los sistemas lineales desarrollado en esta memoria. En esta dirección, nuestras fórmulas de los teoremas 1.3.3 y 1.4.3 pueden añadirse a las presentadas en [19], proporcionando expresiones alternativas para calcular la distancia del sistema (1.11) al mal planteamiento.

En lo referente a sistemas lineales semi-infinitos, el enfoque de [19] es sustancialmente diferente al nuestro en cuanto a la teoría de la estabilidad pues, como ya hemos comentado, cuando T es infinito, nuestro espacio paramétrico Θ no es normado.

Capítulo 2

Medidas del mal planteamiento relativo a la resolubilidad de un problema de optimización lineal

2.1 Introducción

En el Capítulo 1 hemos realizado un estudio cuantitativo de la estabilidad de un sistema de desigualdades lineales asociado a un problema de optimización lineal, en este capítulo incorporamos a nuestro estudio la función objetivo del problema, abordando así el análisis de la estabilidad, desde un punto de vista cuantitativo, del problema de optimización lineal completo.

Diferentes autores (véase, por ejemplo, Todorov [50]) consideran bien planteado un problema de optimización cuando éste tiene una única solución óptima y además dicha solución puede aproximarse por soluciones óptimas de cualquier sucesión prefijada de problemas resolubles convergente al problema nominal. En [8] se establece un marco teórico general en el que ubicar ésta y otras nociones de buen planteamiento de problemas de PLSI. Algunas de estas nociones están estrechamente relacionadas con la condición de que un problema pertenezca al interior

del conjunto de los problemas resolubles. Resulta por tanto de interés, dado uno de estos problemas, conocer a que distancia se encuentra el problema no resoluble más próximo¹.

Por otra parte, con respecto a la idea de que un problema está mal planteado cuando perturbaciones arbitrariamente pequeñas de los vectores de coeficientes² del mismo pueden dar lugar a problemas de diferentes tipos, a saber, consistentes, resolubles, acotados, etc., podríamos considerar como problemas mal planteados aquéllos que están en la frontera de cualquiera de estos conjuntos. El mal planteamiento de un problema respecto de la consistencia ha sido estudiado en el capítulo anterior (obsérvese que la consistencia de un problema no depende de la función objetivo). Así pues y siguiendo con esta idea, un concepto apropiado de mal planteamiento para problemas podría ser el hecho de pertenecer a la frontera del conjunto de los problemas resolubles o bien a la frontera del conjunto de los acotados. El teorema 2.2.1 mostrará que el conjunto de los problemas resolubles y el conjunto de los problemas acotados tienen la misma clausura, el mismo interior y, por tanto, la misma frontera, lo cual justificará asimismo la elección de $bd(\Pi_s)(=bd(\Pi_b))$ como concepto de *mal planteamiento para problemas de optimización lineal* en esta memoria. Además, teniendo en cuenta que para el espacio paramétrico Π se pueden formular resultados análogos al lema 1.2.1 y al corolario 1.2.3, la distancia de un problema, π , resoluble (o acotado) al conjunto de los problemas no resolubles (o no acotados) coincide con la distancia al conjunto de los problemas mal planteados, esto es, $\delta(\pi, \Pi \setminus \Pi_s) = \delta(\pi, bd(\Pi_s))(= \delta(\pi, bd(\Pi_b)))$, lo cual conecta por su parte con el interés al que se hace referencia al final del párrafo anterior. El cálculo de esta distancia se abordará en la sección 2.3.

Un paso previo al cálculo de la distancia mencionada, consiste en determinar los problemas pertenecientes a $bd(\Pi_s)$. Con este fin, en la sección 2.2 se introducen

¹En rigor esta distancia es un ínfimo y no tiene por qué alcanzarse.

²Obsérvese que ahora podemos perturbar tanto los vectores de coeficientes del sistema de restricciones como los de la función objetivo.

dos conjuntos de \mathbb{R}^n , Z^- y Z^+ , asociados a un problema π , que serán claves a la hora de caracterizar el conjunto de los problemas mal planteados y posteriormente para calcular la distancia de un problema a dicho conjunto. La caracterización de la propiedad “ $\pi \in bd(\Pi_s)$ ” requerirá distinguir dos casos, $\pi \in int(\Pi_c)$ y $\pi \in bd(\Pi_c)$. En el primero de ellos el conjunto Z^- permitirá caracterizar los problemas mal planteados, a la vez que proporcionará una partición del subconjunto $int(\Pi_c) \cap \Pi_s$ en términos de la posición relativa del vector 0_n respecto de Z^- (véase el teorema 2.2.4). En el segundo caso ($\pi \in bd(\Pi_c)$) la caracterización vendrá dada en función de dos ingredientes, el primero de ellos en términos del conjunto Z^+ asociado al problema en cuestión, y el segundo relativo al subconjunto $cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Obsérvese que éste último, pese a no estar expresado en términos de subconjuntos de \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^{n+1} , tiene la ventaja de que no involucra la función objetivo del problema. No obstante, se darán condiciones más operativas que describen este último caso, proporcionando incluso una caracterización satisfactoria cuando el conjunto de los miembros derechos del sistema de restricciones está acotado.

Por último, en la sección 2.3 nos centraremos en el cálculo de expresiones para la distancia al mal planteamiento, $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$. Obtendremos diferentes resultados para esta distancia dependiendo de si partimos de un problema resoluble, un problema consistente no resoluble o un problema inconsistente. Más concretamente, en el primero de los casos obtendremos una fórmula explícita para dicha distancia en términos de la distancia del problema a la inconsistencia y de la distancia del vector 0_n al conjunto Z^- , y en los otros casos obtendremos en general acotaciones que, bajo ciertas condiciones, determinarán expresiones de igualdad para dicha distancia. Proporcionaremos asimismo ejemplos y contraejemplos de los resultados, que ilustrarán al mismo tiempo las notables dificultades que surgen en la búsqueda de una expresión general para la distancia al mal planteamiento de los problemas, incluso en el contexto de la PL ordinaria en el plano y con “pocas restricciones”.

A lo largo de este capítulo, salvo que se indique otro supuesto, asumiremos que la norma $\|\cdot\|$ considerada en \mathbb{R}^{n+1} verifica

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right\| \text{ para todo } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.1)$$

Obsérvese que cualquier p -norma, aunque no cualquier norma (véase [48, Teorema 15.2]), verifica esta condición. En \mathbb{R}^n se considerará por su parte la norma (que denotaremos igualmente por $\|\cdot\|$) dada por

$$\|a\| := \left\| \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \text{ para todo } a \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Nótese que si la norma considerada en \mathbb{R}^{n+1} es una p -norma, $p \in [1, +\infty]$, la norma en \mathbb{R}^n también lo es (y con el mismo p).

Observación 2.1.1 La propiedad (2.1) implica que $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b_1 \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|$ cuando $|b_1| \leq |b_2|$. La demostración es una consecuencia inmediata del hecho de que $\begin{pmatrix} a \\ b_1 \end{pmatrix}$ es una combinación convexa de $\begin{pmatrix} a \\ b_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ -b_2 \end{pmatrix}$.

2.2 Problemas mal planteados

Comenzaremos estableciendo, como consecuencia del teorema 2.2.1, que los conceptos de mal planteamiento para problemas relativos a la resolubilidad y a la acotación son equivalentes. Posteriormente caracterizaremos el conjunto $bd(\Pi_s)$ de los problemas mal planteados.

2.2.1 Concepto de mal planteamiento

El siguiente teorema establece la relación anunciada en párrafos anteriores entre el conjunto de los problemas resolubles y el conjunto de los problemas acotados. Este resultado no depende de las normas elegidas en \mathbb{R}^{n+1} y en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.2.1 *Se tienen las siguientes igualdades:*

- (i) $cl(\Pi_s) = cl(\Pi_b)$;
- (ii) $int(\Pi_s) = int(\Pi_b)$;
- (iii) $bd(\Pi_s) = bd(\Pi_b)$.

Demostración. Veamos en primer lugar (i). La inclusión $cl(\Pi_s) \subset cl(\Pi_b)$ es evidente en tanto que $\Pi_s \subset \Pi_b$. Para ver la otra inclusión es suficiente probar que $\Pi_b \subset cl(\Pi_s)$. Tomemos para ello $\pi = (c, \sigma) \in \Pi_b$. Por el teorema 0.4.3 tenemos que $c \in cl(M) = cl(rint(M))$ (véase el teorema 0.2.3) y, por tanto, existe una sucesión $\{c^r\} \subset rint(M)$ convergente a c . Si para cada $r \in \mathbb{N}$ consideramos el problema $\pi_r := (c^r, \sigma)$, obviamente la sucesión $\{\pi_r\}$ converge a π , y $\pi_r \in \Pi_s$, para todo r , en virtud del teorema 0.4.3. Por tanto, $\pi \in cl(\Pi_s)$.

Veamos ahora (ii). De nuevo la inclusión $int(\Pi_s) \subset int(\Pi_b)$ es evidente. Con el fin de probar la inclusión contraria, tomemos $\pi \in int(\Pi_b) \subset int(\Pi_c)$, y un conjunto de nivel no vacío de π , $L(\alpha)$. Distinguiamos dos casos: $O^+(L(\alpha)) \neq \{0_n\}$ y $O^+(L(\alpha)) = \{0_n\}$ (véase §0.2 y §0.4). Supongamos en primer lugar que $\{0_n\} \neq O^+(L(\alpha)) = \{a_t, t \in T; -c\}^o$. Sea entonces $0_n \neq u \in O^+(L(\alpha))$. Como $\pi \in \Pi_b$, tenemos en virtud del teorema 0.4.3 que $c \in cl(M)$, de donde se concluye fácilmente que $c'u = 0$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, consideremos el problema $\pi_r := (c^r, \sigma)$ donde $c^r := c - \frac{1}{r}u$. Obviamente se tiene que $\{\pi_r\}$ converge a π . Por otra parte, si $x^0 \in F$, se tiene que $x^0 + \lambda u \in F = F_r$ para todo $\lambda \geq 0$, y además

$$\begin{aligned} (c^r)'(x^0 + \lambda u) &= \left(c - \frac{1}{r}u\right)'(x^0 + \lambda u) = c'x^0 + \lambda c'u - \frac{1}{r}u'x^0 - \frac{1}{r}\lambda \|u\|_2^2 \\ &= c'x^0 - \frac{1}{r}u'x^0 - \frac{1}{r}\lambda \|u\|_2^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

por tanto $\pi_r \notin \Pi_b$, lo cual contradice que $\pi \in int(\Pi_b)$. Supongamos ahora que $O^+(L(\alpha)) = \{0_n\}$, entonces, en virtud del teorema 0.4.1 tenemos que $c \in int(M)$, y por el corolario 0.4.2 obtenemos entonces que $\pi \in int(\Pi_s)$, con lo que queda establecido (ii).

El apartado (iii) es una consecuencia inmediata de (i) y (ii). ■

Seguidamente caracterizamos $bd(\Pi_s)$ distinguiendo los casos: $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$ y $\pi \in bd(\Pi_c)$.

2.2.2 Caracterización de los problemas mal planteados en el interior del conjunto de los problemas consistentes

El siguiente conjunto de \mathbb{R}^n asociado a un problema de PLSI desempeñará un papel clave a la hora de caracterizar aquellos problemas de $\text{int}(\Pi_c)$ que están mal planteados, esto es, que pertenecen a $bd(\Pi_s)$.

Definición 2.2.2 Dado $\pi = (c, \sigma)$, con $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$, definimos el conjunto

$$Z^- := \text{conv}(\{a_t, t \in T; -c\}).$$

Observación 2.2.3 El conjunto Z^- nos permite reexpresar la condición “ $c \in \text{rint}(M)$ ” (véase el teorema 0.4.3) como “ $0_n \in \text{rint}(Z^-)$ ” (véase el corolario 0.2.5). La siguiente figura ilustra este comentario.

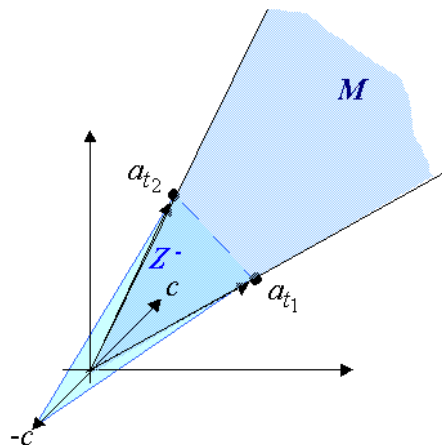


Figura 2.1: $c \in \text{rint}(M) \Leftrightarrow 0_n \in \text{rint}(Z^-)$

Teorema 2.2.4 *Dado $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$, se tiene que*

- (i) $\pi \in \text{int}(\Pi_s)$ si y sólo si $0_n \in \text{int}(Z^-)$;
- (ii) $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ si y sólo si $0_n \in \text{bd}(Z^-)$;
- (iii) $\pi \in \text{ext}(\Pi_s)$ si y sólo si $0_n \in \text{ext}(Z^-)$.

Demostración. (i) es consecuencia inmediata del corolario 0.4.2 junto con la observación anterior. Seguidamente establecemos (ii), empezando por la condición “si”. Supongamos pues que $0_n \in \text{bd}(Z^-)$, entonces existe una sucesión $\{u^r\} \subset \text{rint}(Z^-)$ convergente a 0_n . Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideramos el problema $\pi_r := (c^r, \sigma_r)$ donde $c^r := c + u^r$ y $\sigma_r := \{(a_t - u^r)'x \geq b_t, t \in T\}$. Tenemos que $\lim_r \sigma_r = \sigma$, y como $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$, existe un $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^r \in \text{int}(\Theta_c)$ para todo $r \geq r_1$. Por otra parte, como $u^r \in \text{rint}(Z^-)$, se tiene $0_n \in \text{rint}(Z_r^-)$ donde $Z_r^- := Z^- - u^r = \text{conv}(\{a_t - u^r, t \in T\} \cup \{-(c + u^r)\})$, y la observación anterior nos conduce a $c + u^r \in \text{rint}(M_r)$, donde $M_r := \text{cone}(\{a_t - u^r, t \in T\})$. Así, por el teorema 0.4.3, tenemos que $\pi_r \in \Pi_s$ para todo $r \geq r_1$. Puesto que $\{\pi_r\}$ converge a π tenemos que $\pi \in \text{cl}(\Pi_s)$, y de $0_n \notin \text{int}(Z^-)$ deducimos $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ en virtud de (i).

Veamos ahora el “sólo si”. Tomemos pues $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ y supongamos por reducción al absurdo que $0_n \notin \text{bd}(Z^-)$, lo que conduce a $0_n \in \text{ext}(Z^-)$ en virtud de (i). Podemos entonces separar estrictamente 0_n y Z^- , existiendo así $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u \neq 0_n$, tal que $u'0_n < w$ y $u'z \geq w$ para todo $z \in Z^-$, en particular $u'a_t \geq w$ para todo $t \in T$, $u'(-c) \geq w$ y $w > 0$. Puesto que $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$, existe una sucesión $\{\pi_r\} \subset \Pi_s$ convergente a π , con $\pi_r = (c^r, \sigma_r)$ y $\sigma_r = \{(a_t^r)'x \geq b_t^r, t \in T\}$, para cada $r \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$, existe algún $r_1 \in \mathbb{N}$ de manera que $\pi_r \in \text{int}(\Pi_c)$ para todo $r \geq r_1$.

Por otra parte, se tiene

$$(a_t^r)'u = (a_t)'u + (a_t^r - a_t)'u \geq w - \|a_t^r - a_t\| \|u\|_* \geq w - \delta(\pi, \pi_r) \|u\|_*,$$

y

$$(c^r)'u = (c^r - c)'u + c'u \leq \|c^r - c\| \|u\|_* - w \leq \delta(\pi, \pi_r) \|u\|_* - w.$$

De nuevo, dado que $\{\pi_r\}$ converge a π , existe un $r_2 \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $r \geq r_2$ se tiene $\delta(\pi, \pi_r) \leq \frac{w}{2\|u\|_*}$, y por tanto,

$$(a_t^r)' u \geq \frac{w}{2} > 0 \text{ y } (c^r)' u \leq -\frac{w}{2} \text{ para todo } r \geq r_2. \quad (2.3)$$

Sea pues $r_0 := \max\{r_1, r_2\}$ y fijemos un $r \geq r_0$ arbitrario. Puesto que $\pi_r \in \Pi_s$, el teorema 0.4.3 implica $c^r \in cl(M_r)$, luego existe una sucesión $\{\lambda^{r,k}\}_k \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que

$$c^r = \lim_k \left\{ \sum_{t \in T} \lambda^{r,k} a_t^r \right\}.$$

Multiplicando en esta última expresión por u y utilizando (2.3) obtenemos

$$(c^r)' u = \lim_k \left\{ \sum_{t \in T} \lambda^{r,k} (a_t^r)' u \right\} \geq 0,$$

lo que contradice $(c^r)' u \leq -\frac{w}{2} < 0$ (véase de nuevo (2.3)).

Por último, (iii) es consecuencia inmediata de (i) y (ii). ■

Observación 2.2.5 (i) La hipótesis “ $\pi \in int(\Pi_c)$ ” del teorema anterior no es superflua, puesto que el problema, en \mathbb{R}^2 , dado por $\text{Inf}\{x_2 \mid x_1 \geq 0, -x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ pertenece a $bd(\Pi_c) \cap bd(\Pi_s)$ y, sin embargo, $0_n \in int(Z^-)$.

(ii) Mientras que en el primer apartado del teorema anterior la condición “ $0_n \in int(Z^-)$ ” puede sustituirse por “ $c \in int(M)$ ” (véase observación 2.2.3), en el segundo apartado la condición “ $0_n \in bd(Z^-)$ ” no puede cambiarse por “ $c \in bd(M)$ ”. Considérese, por ejemplo, el problema, en \mathbb{R}^2 , $\text{Inf}\{x_2 \mid \frac{1}{r}x_1 \geq -1, r \in \mathbb{N}\}$.

2.2.3 Caracterización de los problemas mal planteados en la frontera del conjunto de los problemas consistentes

Seguidamente caracterizamos, de entre los problemas $\pi \in bd(\Pi_c)$, aquellos que se encuentran en $bd(\Pi_s)$. Una herramienta clave en dicho propósito viene dada por el

siguiente subconjunto de \mathbb{R}^n asociado a un problema π .

Definición 2.2.6 Dado $\pi = (c, \sigma) \in \Pi$, definimos el conjunto

$$Z^+ := \text{conv}(\{a_t, t \in T; c\})$$

Antes de abordar los resultados principales de esta subsección veamos algunos lemas que aíslan ciertas propiedades a las que apelaremos en lo que sigue. Estos lemas no dependen de la norma considerada en \mathbb{R}^n .

Lema 2.2.7 Sea $\sigma \in \Theta \setminus \Theta_\infty$. Si $0_n \in \text{ext}(A)$ entonces $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$.

Demostración. Sea $\sigma \in \Theta \setminus \Theta_\infty$. Vamos a probar el contrareciproco, luego supongamos que $\sigma \notin \text{int}(\Theta_c)$; entonces tenemos que $0_{n+1} \in \text{cl}(H)$ en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15, y por tanto, existen sendas sucesiones $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^r = 1$ para todo r , y $\{\mu_r\} \subset \mathbb{R}_+$, tales que

$$0_{n+1} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu_r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si consideramos las n primeras coordenadas en la expresión anterior, obtenemos que $0_n \in \text{cl}(A)$. ■

Lema 2.2.8 Sea $\pi \in \Pi_b$ con $0_n \in \text{int}(Z^+)$, entonces $M = \mathbb{R}^n$.

Demostración. Tomemos $\pi \in \Pi_b$ con $0_n \in \text{int}(Z^+)$ y supongamos por reducción al absurdo que $M \neq \mathbb{R}^n$, y en particular $c \neq 0_n$ (véase el corolario 0.2.5). Existe entonces un semiespacio cerrado de \mathbb{R}^n , S , tal que $M \subset S = \text{cl}(S)$. Por otra parte, por ser $\pi \in \Pi_b$, el teorema 0.4.3 asegura que $c \in \text{cl}(M) \subset \text{cl}(S)$, luego $-c \notin \text{int}(S)$, pues de lo contrario el lema de accesibilidad (véase 0.2.3) implicaría que $0_n \in \text{int}(S)$, lo cual es absurdo. En consecuencia $-c \notin \text{int}(M)$, luego por el corolario 0.2.5 se tiene que $0_n \notin \text{int}(Z^+)$, y con ello la contradicción deseada. ■

Lema 2.2.9 Sea $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$. Si $c \in \text{cl}(M)$ entonces $\pi \in \text{cl}(\Pi_s)$.

Demostración. Sea $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$ y supongamos que $c \in \text{cl}(M)$, entonces existe una sucesión $\{c^r\} \subset \text{rint}(M)$ convergente a c (véase el teorema 0.2.3). Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideramos el problema $\pi_r := (c^r, \sigma)$. Obviamente la sucesión $\{\pi_r\}$ converge a π , así que, para r suficientemente grande, tendremos que $\pi_r \in \text{int}(\Pi_c)$ y, además, como $c^r \in \text{rint}(M)$, $\pi_r \in \Pi_s$ en virtud del teorema 0.4.3. Por lo tanto $\pi \in \text{cl}(\Pi_s)$. ■

El siguiente teorema proporciona la caracterización que veníamos buscando.

Teorema 2.2.10 Sea $\pi \in \text{bd}(\Pi_c)$. Entonces $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ si y sólo si, bien $\pi \in \text{cl}(\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c)$, o bien $0_n \in \text{bd}(Z^+)$.

Demostración. Comenzaremos estableciendo la condición “si”. Veamos en primer lugar que $\text{cl}(\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c) \subset \text{bd}(\Pi_s)$. Puesto que $\text{bd}(\Pi_s)$ es cerrado, bastará probar que $\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c \subset \text{bd}(\Pi_s)$. Sea pues $\pi \in \text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c$ y sea $\bar{x} \in F$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ sea $\pi_p := (c, \sigma_p)$ donde $\sigma_p := \left\{ \left(a_t + \frac{1}{p}c \right)' x \geq b_t + \frac{1}{p}c'\bar{x}, t \in T \right\}$. Nótese que σ_p es consistente, de hecho $\bar{x} \in F_p$ dado que

$$\left(a_t + \frac{1}{p}c \right)' \bar{x} = a_t'\bar{x} + \frac{1}{p}c'\bar{x} \geq b_t + \frac{1}{p}c'\bar{x}, \forall t \in T.$$

Además $\delta(\pi_p, \pi) = \frac{1}{p} \left\| \begin{pmatrix} c \\ c'\bar{x} \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ y por tanto $\{\pi_p\}$ converge a π . Por otra parte, el teorema 0.3.3 asegura que $0_{n+1} \in \text{cl}(C)$ y por tanto existe una sucesión $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^r = 1$ para todo r , tal que $0_{n+1} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\}$, de donde se obtiene que

$$\frac{1}{p} \begin{pmatrix} c \\ c'\bar{x} \end{pmatrix} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \frac{1}{p} \begin{pmatrix} c \\ c'\bar{x} \end{pmatrix} \right) \right\} \subset \text{cl}(K_p),$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. El Lema de Farkas asegura entonces que $c'x \geq c'\bar{x}$ para todo $x \in F_p$, con lo cual $\bar{x} \in F^{op}$, y así $\pi_p \in \Pi_s$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\pi \in \text{cl}(\Pi_s)$ y como $\pi \in \text{bd}(\Pi_c)$, ha de ser $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$.

Supongamos ahora que $0_n \in bd(Z^+)$ y veamos que $\pi \in bd(\Pi_s)$. Podemos separar 0_n y Z^+ , luego existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u'y \geq 0$ para todo $y \in Z^+$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideremos el problema $\pi_r := (c^r, \sigma_r)$ donde $c^r := c + \frac{1}{r}u$ y $\sigma_r := \left\{ (a_t + \frac{1}{r}c^r)' x \geq b_t, t \in T \right\}$. Tenemos que

$$\delta(\pi_r, \pi) = \max \left\{ \left\| \frac{1}{r}u \right\|, \left\| \frac{1}{r}c^r \right\| \right\} = \frac{1}{r} \max \left\{ \|u\|, \left\| c + \frac{1}{r}u \right\| \right\} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

y por tanto $\{\pi_r\}$ converge a π . Veamos ahora que $0_n \in ext(A_r)$ para cada $r \in \mathbb{N}$ donde $A_r := conv \left(\left\{ a_t + \frac{1}{r}c^r, t \in T \right\} \right)$. En efecto, si $a \in A_r$, entonces existe $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$, tal que $a = \sum_{t \in T} \lambda_t \left(a_t + \frac{1}{r}c^r \right)$, y en particular

$$a'u = \sum_{t \in T} \lambda_t \left(a_t + \frac{1}{r}c^r \right)' u = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t' u + \frac{1}{r}c'u + \frac{1}{r^2} \|u\|_2^2.$$

Como $u'y \geq 0$ para todo $y \in Z^+$, entonces $a_t'u \geq 0$ para todo $t \in T$ y $c'u \geq 0$, y así, la expresión anterior nos da que $a'u \geq \frac{1}{r^2} \|u\|_2^2 > 0$ para todo $a \in A_r$. Consideremos entonces el subconjunto abierto de \mathbb{R}^n dado por $W := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u'x < \frac{1}{r^2} \|u\|_2^2 \right\}$. Obviamente $0_n \in W$ y $W \cap A_r = \emptyset$, por tanto $0_n \in ext(A_r)$ y en virtud del lema 2.2.7 tenemos que $\pi_r \in int(\Pi_c)$.

Por otra parte, como $\pi \in bd(\Pi_c)$ tenemos de nuevo por el lema 2.2.7 que $0_n \in cl(A)$, y por tanto, existe una sucesión $\{\gamma^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \gamma_t^k = 1$ para todo k , tal que $0_n = \lim_k \sum_{t \in T} \gamma_t^k a_t$, lo cual implica que

$$\frac{1}{r}c^r = \lim_k \sum_{t \in T} \gamma_t^k \left(a_t + \frac{1}{r}c^r \right),$$

de donde se deduce que $c^r \in cl(M_r)$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Así, el lema 2.2.9 asegura que $\pi_r \in cl(\Pi_s)$, y por tanto $\pi \in cl(cl(\Pi_s)) = cl(\Pi_s)$. Como $\pi \in bd(\Pi_c)$, ha de ser $\pi \in bd(\Pi_s)$, como queríamos demostrar.

Veamos ahora la condición “sólo si”. Nótese que si fuese $0_n \in \text{ext}(Z^+)$ tendríamos en particular $0_n \in \text{ext}(A)$, y el lema 2.2.7 entraría en contradicción con la hipótesis $\pi \in \text{bd}(\Pi_c)$. Por lo tanto bastará probar que si $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ y $0_n \in \text{int}(Z^+)$, entonces $\pi \in \text{cl}(\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Dado π en las condiciones anteriores, consideremos una sucesión $\{\pi_r\} \subset \Pi_s$ convergente a π , con $\pi_r = (c^r, \sigma_r)$ donde $\sigma_r = \{(a_t^r)' x \geq b_t^r, t \in T\}$, $r \in \mathbb{N}$. Para fijar ideas supongamos que \mathbb{R}^{n+1} está provisto de la norma euclídea (nótese que esta suposición no afecta a la tesis del teorema que estamos probando). Para cada $r \in \mathbb{N}$, sea $\begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \in \text{bd}(H_r)$ tal que $d(0_{n+1}, \text{bd}(H_r)) = d\left(0_{n+1}, \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix}\right)$, y consideremos el problema $\tilde{\pi}_r := (c^r, \tilde{\sigma}_r)$ donde $\tilde{\sigma}_r := \{(a_t^r - u^r)' x \geq b_t^r - v^r, t \in T\}$. Como $\pi \in \text{bd}(\Pi_c)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\pi}_r, \pi) &\leq \delta(\tilde{\pi}_r, \pi_r) + \delta(\pi_r, \pi) = \left\| \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \right\|_2 + \delta(\pi_r, \pi) \\ &= d(0_{n+1}, \text{bd}(H_r)) + \delta(\pi_r, \pi) = d(\sigma_r, \text{bd}(\Theta_c)) + \delta(\pi_r, \pi) \\ &\leq d(\sigma_r, \sigma) + \delta(\pi_r, \pi) \leq 2\delta(\pi_r, \pi) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

y por tanto $\{\tilde{\pi}_r\}$ converge a π . Veamos ahora que $\tilde{\pi}_r \in \text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c$. En el caso en que exista un $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} = 0_{n+1}$ para todo $r \geq r_0$, tendremos que $\tilde{\pi}_r = \pi_r \in \Pi_s \subset \Pi_c$ y además $0_{n+1} = \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \in \text{bd}(H_r) = \text{bd}(\tilde{H}_r)$, luego $\tilde{\pi}_r \in \text{bd}(\Pi_c)$ en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15. Podemos suponer entonces que existe una subsucesión de $\left\{ \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \right\}$, que denotaremos de la misma forma por abreviar, tal que $\begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \neq 0_{n+1}$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Puesto que $\pi_r \in \Pi_s \subset \Pi_c$, de nuevo por los teoremas 1.2.14 y 1.2.15 tenemos que $0_{n+1} \notin \text{int}(H_r)$, y como $\begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix}$ es una mejor aproximación (en norma eucídea) de 0_{n+1} en $\text{bd}(H_r)$, tenemos que

$$\left(\begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r - \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \right)' \left(\begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} - 0_{n+1} \right) \geq 0, \quad \forall t \in T, \forall \mu \geq 0,$$

de donde se obtiene que

$$(a_t^r)' u^r - \|u^r\|_2^2 + b_t^r v^r - \mu v^r - |v^r|^2 \geq 0, \forall t \in T, \forall \mu \geq 0. \quad (2.4)$$

Si fuera $v^r > 0$, tomando $\mu \geq 0$ suficientemente grande en la expresión anterior obtendríamos una contradicción. Por otra parte, si $v^r = 0$, sería $u^r \neq 0_n$ y de (2.4) se obtendría que

$$(a_t^r)' u^r \geq \|u^r\|_2^2 > 0, \forall t \in T. \quad (2.5)$$

Ahora bien, como $0_n \in \text{int}(Z^+)$ y $\{\pi_r\}$ converge a π , el lema 1.3.1 (i) asegura que $0_n \in \text{int}(Z_r^+)$ para r suficientemente grande, y por otra parte, como $\pi_r \in \Pi_s \subset \Pi_b$, el lema 2.2.8 garantiza que $M_r = \mathbb{R}^n$ para r suficientemente grande lo cual entra en contradicción con (2.5). Luego tenemos que $v^r < 0$. Veamos que $\frac{-u^r}{v^r} \in \tilde{F}_r$. En efecto, tomando $\mu = 0$ en (2.4) se obtiene que

$$\left(\begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} -u^r/v^r \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{v^r} ((a_t^r)' u^r - \|u^r\|_2^2 + b_t^r v^r - |v^r|^2) \geq 0, \forall t \in T.$$

Luego $\tilde{\pi}_r \in \Pi_c$. Además, por ser $\begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} \in \text{bd}(H_r)$, se tiene que $0_{n+1} \in \text{bd}(\tilde{H}_r)$ y por tanto $\tilde{\pi}_r \in \text{bd}(\Pi_c)$ en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15. Por tanto, $\pi \in \text{cl}(\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ como queríamos demostrar. ■

El siguiente teorema pretende expresar la condición “ $\pi \in \text{cl}(\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ ” de una forma más operativa, concretamente en términos de C . De la prueba destacamos el hecho de que utiliza “perturbaciones no rígidas” (distintas de las traslaciones) para, informalmente hablando, balancear C de forma adecuada. Primero presentamos un lema técnico.

Lema 2.2.11 *Si $\sigma \in \text{bd}(\Theta_c) \cap \Theta_i$ entonces $0_n \in \text{bd}(A)$.*

Demostración. Dado $\sigma \in \text{bd}(\Theta_c) \cap \Theta_i$, por el lema 2.2.7 se tiene que $0_n \in \text{cl}(A)$. Supongamos por reducción al absurdo que $0_n \in \text{int}(A)$, entonces

el corolario 0.2.5 asegura que $0_n \in \text{int}(M)$ y por tanto $M = \mathbb{R}^n$, además, como $\sigma \in \Theta_i$ se tiene de hecho que $\sigma \in \text{int}(\Theta_{si})$ (véase [21, Teorema 6.3]), lo cual es absurdo pues $\sigma \in \text{bd}(\Theta_c)$; luego $0_n \in \text{bd}(A)$. ■

Teorema 2.2.12 *Sea $\pi \in \text{bd}(\Pi_c)$. Si $\pi \in \text{cl}(\text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c)$, entonces $0_{n+1} \in \text{bd}(C)$. El recíproco es cierto cuando $\{b_t, t \in T\}$ está acotado.*

Demostración. Si $\pi = \lim_r \pi_r$, con $\pi_r \in \text{bd}(\Pi_c) \cap \Pi_c$, $r = 1, 2, \dots$, entonces $0_{n+1} \in \text{bd}(C_r)$ para cada $r \in \mathbb{N}$ en virtud del teorema 0.3.3 (nótese que no puede ser $0_{n+1} \in \text{int}(C_r)$ al ser $\pi_r \in \Pi_c$). El lema 1.3.1 establece ahora que $0_{n+1} \in \text{bd}(C)$.

Supongamos ahora que existe una constante $k \geq 0$ tal que $\sup_{t \in T} |b_t| \leq k$ y que $0_{n+1} \in \text{bd}(C)$, y situémonos en el caso no trivial $\pi \in \Pi_i$. El lema anterior asegura que $0_n \in \text{bd}(A)$, luego podemos separar 0_n y A , y por tanto, existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u' a_t \geq 0$ para todo $t \in T$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\|u\|_2 = 1$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideramos el problema $\pi_r := (c, \sigma_r)$ donde $\sigma_r := \left\{ \left(a_t + \frac{1}{r} b_t u \right)' x \geq b_t, t \in T \right\}$. Tenemos que $\delta(\pi_r, \pi) = d(\sigma_r, \sigma) = \sup_{t \in T} \left\| \frac{1}{r} b_t u \right\| = \frac{1}{r} \|u\| \sup_{t \in T} |b_t| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, luego $\{\pi_r\}$ converge a π . Fijamos $r \in \mathbb{N}$ arbitrario. Veamos en primer lugar que $ru \in F_r$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} a_t + \frac{1}{r} b_t u \\ b_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} ru \\ -1 \end{pmatrix} = r a_t' u \geq 0 \quad \forall t \in T,$$

luego $ru \in F_r$ y por tanto $\pi_r \in \Pi_c$. Veamos ahora que $\pi_r \in \text{bd}(\Pi_c)$, lo que equivale, en virtud del teorema 0.3.3, a que $0_{n+1} \in \text{cl}(C_r)$. Por hipótesis tenemos que $0_{n+1} \in \text{bd}(C)$ y por tanto existe una sucesión $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^k = 1$

para todo k , tal que $0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$. En particular, si nos quedamos con la última coordenada tenemos que $0 = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k b_t$, y si ahora multiplicamos esta

última expresión por $\frac{1}{r} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$ obtenemos $0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \frac{1}{r} b_t \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, y por tanto

$$0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t + \frac{1}{r} b_t u \\ b_t \end{pmatrix} \in cl(C_r).$$

■

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis de la acotación de $\{b_t, t \in T\}$ en el teorema anterior no es superflua.

Ejemplo 2.2.13 Consideremos el problema, en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & Inf - x \\ \text{s.a} \quad & 0x \geq 1, \text{ si } t = 0, \\ & x \geq -r, \text{ si } t = r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos la siguiente situación:

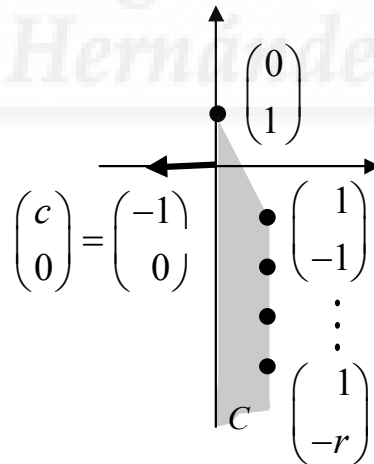


Figura 2.2: $0_2 \in bd(C)$ pero $\pi \notin cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$.

Es fácil comprobar, como se observa en la figura anterior, que el conjunto $\{b_t, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ no está acotado y que $\pi \in bd(\Pi_c)$, $0 \in int(Z^+)$ y $0_2 \in bd(C)$.

Veamos ahora que $\pi \notin cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Razonando por reducción al absurdo supongamos que existe una sucesión $\{\pi_s\} \subset bd(\Pi_c) \cap \Pi_c$ convergente a π . Pongamos $\pi_s = (c^s, \sigma_s)$ donde $\sigma_s = \{(0 + a_0^s)'x \geq 1 + b_0^s, (1 + a_r^s)'x \geq -r + b_r^s, r \in \mathbb{N}\}$. Como $\{\pi_s\}$ converge a π , dado $0 < \varepsilon < 1$ existe un $s_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $s \geq s_0$ entonces $|a_r^s| < \varepsilon$ y $|b_r^s| < \varepsilon$, para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $\left| \frac{a_0^s(1 - b_1^s)}{(1 + a_1^s)(1 + b_0^s)} \right| < \varepsilon$. Distinguiamos tres casos: si $a_0^s > 0$, como $1 + a_r^s > 1 - \varepsilon > 0$ para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $0_2 \in ext(H_s)$ (y $\sigma_s \notin \Theta_\infty$), y por tanto $\pi_s \in int(\Pi_c)$ en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15. Si $a_0^s = 0$, como $1 + b_0^s > 1 - \varepsilon > 0$ entonces $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+b_0^s} \begin{pmatrix} a_0^s \\ 1 + b_0^s \end{pmatrix} \in N_s$ y por tanto $\pi_s \in \Pi_i$ en virtud del teorema 0.3.1. Y por último, si $a_0^s < 0$ podemos poner

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_0^s \begin{pmatrix} a_0^s \\ 1 + b_0^s \end{pmatrix} + \lambda_1^s \begin{pmatrix} 1 + a_1^s \\ -1 + b_1^s \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_0^s = \frac{1}{(1 + b_0^s) \left(1 + \frac{a_0^s(1 - b_1^s)}{(1 + a_1^s)(1 + b_0^s)} \right)}$ y $\lambda_1^s = \frac{-a_0^s}{(1 + a_1^s)(1 + b_0^s) + a_0^s(1 - b_1^s)}$ son cantidades positivas por la elección que se ha hecho de ε , luego de nuevo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_s$ y $\pi_s \in \Pi_i$. En cualquier caso, hemos visto que $\pi_s \in int(\Pi_c) \cup \Pi_i$ para todo $s \geq s_0$ lo cual es una contradicción, luego no puede ser $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$.

Con los resultados vistos hasta ahora el siguiente teorema caracteriza el conjunto de los problemas mal planteados (pertenecientes a $bd(\Pi_s)$) que verifican que $\{b_t, t \in T\}$ está acotado en términos de H, C (subconjuntos de \mathbb{R}^{n+1}), Z^- y Z^+ (subconjuntos de \mathbb{R}^n). Nótese que esta situación engloba como caso particular al de la PL ordinaria.

Teorema 2.2.14 *Sea $\pi \in \Pi$ tal que el conjunto $\{b_t, t \in T\}$ es acotado. Entonces, $\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (i) $0_{n+1} \in ext(H)$ y $0_n \in bd(Z^-)$;
- (ii) $0_{n+1} \in bd(H) \cap bd(C)$;
- (iii) $0_{n+1} \in bd(H)$ y $0_n \in bd(Z^+)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\pi \in bd(\Pi_s) \subset cl(\Pi_c)$. Si $\pi \in int(\Pi_c)$ entonces $0_{n+1} \in ext(H)$ en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15, y $0_n \in bd(Z^-)$ en virtud del teorema 2.2.4, y por tanto (i). Si $\pi \in bd(\Pi_c)$ entonces $0_{n+1} \in bd(H)$ en virtud de los teoremas 1.2.14 y 1.2.15. Si $0_{n+1} \in bd(C)$ entonces (ii), y en caso contrario los teoremas 2.2.10 y 2.2.12 aseguran (iii). Veamos ahora que cualquiera de las condiciones (i), (ii) o (iii) implica que $\pi \in bd(\Pi_s)$. Supongamos que se tiene (i), entonces $0_{n+1} \in ext(H)$ y como $\{b_t, t \in T\}$ está acotado, $\sigma \in \Theta \setminus \Theta_\infty$, y los teoremas 1.2.14 y 1.2.15 establecen entonces que $\pi \in int(\Pi_c)$. Además $0_n \in bd(Z^-)$, luego $\pi \in bd(\Pi_s)$ en virtud del teorema 2.2.4. Supongamos ahora que tenemos (ii). Por ser $0_{n+1} \in bd(H)$ y $\{b_t, t \in T\}$ estar acotado los teoremas 1.2.14 y 1.2.15 establecen que $\pi \in bd(\Pi_c)$ y en consecuencia $\pi \in bd(\Pi_s)$, de nuevo en virtud de los teoremas 2.2.10 y 2.2.12. Por último, si se tiene (iii), entonces, de nuevo $\pi \in bd(\Pi_c)$, y en virtud del teorema 2.2.10 concluimos que $\pi \in bd(\Pi_s)$. ■

Observación 2.2.15 En el teorema anterior, la hipótesis de que $\{b_t, t \in T\}$ esté acotado sólo se utiliza en la condición “si”, luego para cualquier $\pi \in bd(\Pi_s)$ ha de verificarse alguna de las condiciones (i), (ii) o (iii).

En el resto de esta sección estableceremos condiciones suficientes para que un problema $\pi \in bd(\Pi_c)$ pertenezca a $cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ (y por tanto a $bd(\Pi_s)$ en virtud del teorema 2.2.10). Presentamos además diversos ejemplos que muestran que dichas condiciones no son necesarias; para terminar concluyendo que las herramientas H, C, Z^- y Z^+ no permiten por sí solas caracterizar la condición “ $\pi \in bd(\Pi_s)$ ” cuando $\{b_t, t \in T\}$ no está acotado (véase el párrafo precedente al ejemplo 2.2.21).

Definición 2.2.16 Dados $\sigma \in \Theta$ y $\mu \geq 0$, definimos los siguientes subconjuntos convexos de C :

$$C_\mu := conv \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \middle| \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| \leq \mu, t \in T \right\} \right),$$

$$\tilde{C}_\mu := conv \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \middle| |b_t| \leq \mu, t \in T \right\} \right).$$

Teorema 2.2.17 Sea $\pi \in bd(\Pi_c)$. Si existe $\mu \geq 0$ tal que $0_{n+1} \in bd(C_\mu)$ entonces $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$.

Demostración. Sea $\pi \in bd(\Pi_c)$, y situémonos en el caso no trivial $\pi \in \Pi_i$. Supongamos que existe $\mu \geq 0$ tal que $0_{n+1} \in bd(C_\mu)$. Por el lema 1.2.7 tenemos que existe $\rho \geq 0$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} \in cl(C)$, sea $\rho_0 := \sup \left\{ \rho \geq 0 \mid \begin{pmatrix} 0_n \\ \rho \end{pmatrix} \in cl(C) \right\}$ ($\rho_0 < +\infty$ ya que $\sigma \notin \Theta_\infty$, véase la proposición 1.2.11). Sea $\mu_0 \geq \max\{\mu, \rho_0 + 1\}$. Es evidente que $0_{n+1} \in cl(C_{\mu_0})$ y también que $\begin{pmatrix} 0_n \\ \mu_0 \end{pmatrix} \notin cl(C)$, podemos entonces separar estrictamente $\begin{pmatrix} 0_n \\ \mu_0 \end{pmatrix}$ y $cl(C)$, y así existen $\begin{pmatrix} v \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\begin{pmatrix} v \\ \alpha \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0_n \\ \mu_0 \end{pmatrix} < \beta$ y $\begin{pmatrix} v \\ \alpha \end{pmatrix}' y \geq \beta$ para todo $y \in cl(C)$, en particular, como $0_{n+1} \in cl(C_{\mu_0}) \subset cl(C)$ se tiene que $\beta \leq 0$ y consecuentemente $\alpha < 0$. Además, $\alpha\mu_0 < \beta$ y $\begin{pmatrix} v \\ \alpha \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq \beta$ para todo $t \in T$, luego $\begin{pmatrix} v \\ -\alpha \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq \frac{\beta}{-\alpha} > -\mu_0$.

Por otra parte, como $\pi \in bd(\Pi_c) \cap \Pi_i$, el lema 2.2.11 asegura que $0_n \in bd(A)$ y por tanto también podemos separar 0_n y A ; así pues, existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'_t u \geq 0$ para todo $t \in T$.

Sea $w := \frac{v}{-\alpha}$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ pongamos $u^r := u + \frac{1}{r}w$ y definamos el problema $\pi_r := (c, \sigma_r)$ donde los coeficientes de σ_r vienen dados para cada $t \in T$ por

$$\begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + [\frac{1}{r}b_t - a'_t u^r]_+ \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| > \mu_0, \\ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} - \frac{1}{r}(a'_t w - b_t) \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| \leq \mu_0, \end{cases}$$

siendo $[\alpha]_+ := \max\{0, \alpha\}$ la parte positiva del número real α . Veamos en primer lugar que $\{\pi_r\}$ converge a π . Sabemos que $\begin{pmatrix} w \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} > -\mu_0$, esto es, $a'_t w > b_t - \mu_0$ para todo $t \in T$. Así,

$$a'_t u^r - \frac{1}{r}b_t = a'_t u + \frac{1}{r}a'_t w - \frac{1}{r}b_t \geq \frac{-1}{r}\mu_0,$$

es decir, $\frac{1}{r}b_t - a'_t u^r \leq \frac{\mu_0}{r}$ con $\frac{\mu_0}{r} \geq 0$, y por tanto $[\frac{1}{r}b_t - a'_t u^r]_+ \leq \frac{\mu_0}{r}$. Así pues, si $\left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| > \mu_0$ entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| = \left[\frac{1}{r} b_t - a_t' u^r \right]_+ \frac{\|u^r\|}{\|u^r\|_2^2} \leq \frac{\mu_0}{r} \frac{\|u^r\|}{\|u^r\|_2^2}. \quad (2.6)$$

En el caso en que $\left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| \leq \mu_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| &= \left\| -\frac{1}{r} (a_t' w - b_t) \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \frac{\mu_0}{r} \left\| \begin{pmatrix} w \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \frac{\|u^r\|}{\|u^r\|_2^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ahora bien, como $\{u^r\}$ converge a u , la sucesión $\left\{ \frac{\|u^r\|}{\|u^r\|_2^2} \right\}$ converge a $\frac{\|u\|}{\|u\|_2^2}$ y por tanto está acotada, así pues, de (2.6) y (2.7) tenemos que $d(\sigma_r, \sigma) \leq \frac{k}{r}$ para cierta constante $k \geq 0$, luego $\{\sigma_r\}$ converge a σ y consecuentemente $\{\pi_r\}$ converge a π .

Veamos ahora que $\pi_r \in \Pi_c$, de hecho, vamos a ver que $ru^r \in F_r$ para todo $r \in \mathbb{N}$. En efecto, si $\left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| > \mu_0$ entonces

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \left[\frac{1}{r} b_t - a_t' u^r \right]_+ \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} ru^r \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= r \left(a_t' u^r - \frac{1}{r} b_t + \left[\frac{1}{r} b_t - a_t' u^r \right]_+ \right) = r [a_t' u^r - \frac{1}{r} b_t]_+ \geq 0, \end{aligned}$$

y, en el caso en que $\left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| \leq \mu_0$ tenemos

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} - \frac{1}{r} (a_t' w - b_t) \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} ru^r \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= r \left(a_t' (u + \frac{1}{r} w) - \frac{1}{r} b_t - \frac{1}{r} (a_t' w - b_t) \right) = r a_t' u \geq 0. \end{aligned}$$

Veamos por último que $0_{n+1} \in cl(C_r)$, de donde tendremos (aplicando el teorema 0.3.3) que $\pi_r \in bd(\Pi_c)$. En efecto, como $0_{n+1} \in bd(C_{\mu_0})$, entonces podemos poner $0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$ con $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, $\sum_{t \in T} \lambda_t^k = 1$ y $\lambda_t^k = 0$ si $\left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\| > \mu_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. En particular,

$$0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \frac{-1}{r} \lambda_t^k \left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} w \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \frac{-1}{r} (a'_t w - b_t) \begin{pmatrix} u^r / \|u^r\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por tanto

$$0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} \in cl(C_r).$$

■

El recíproco en el teorema anterior no es cierto en general como muestra el siguiente ejemplo, que, junto con el ejemplo 2.2.19, motiva una nueva condición suficiente para que $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ en términos del conjunto \tilde{C}_μ .

Ejemplo 2.2.18 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \pi : \quad & Inf -x_1 + 0x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0x_1 + 0x_2 \geq 1, \text{ si } t = 0, \\ & 0x_1 - x_2 \geq 0, \text{ si } t = 1, \\ & x_1 + rx_2 \geq 0, \text{ si } t = 2r - 1, r = 2, 3, \dots, \\ & rx_1 + 0x_2 \geq r, \text{ si } t = 2r, r = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Gráficamente se tiene la siguiente situación, donde no hemos representado el último bloque de restricciones, cuya única finalidad es que $\{b_t, t \in T\}$ no esté acotado.

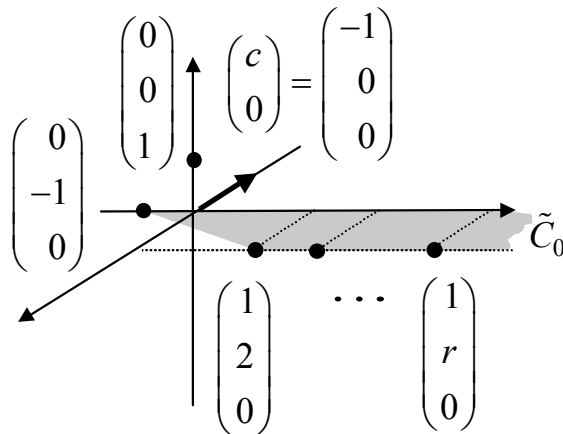


Figura 2.3: El recíproco del Teorema 2.2.17 no es cierto en general.

Se comprueba fácilmente, como se aprecia también en la figura anterior, que $\pi \in bd(\Pi_c)$ y $0_3 \notin bd(C_\mu)$ cualquiera que sea $\mu \geq 0$. Veamos que sin embargo $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Para ello consideremos para cada $s \in \mathbb{N}$ el problema π_s resultante de cambiar en π la restricción correspondiente a $t = 0$ por $\frac{1}{s}x_1 + 0x_2 \geq 1$. Se comprueba fácilmente que $\pi_s \in bd(\Pi_c) \cap \Pi_c$ para todo $s \in \mathbb{N}$ (de hecho $(s, 0)' \in F_s$) y $\delta(\pi, \pi_s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$. Por tanto $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$.

Del ejemplo anterior parece desprenderse que si $0_{n+1} \in bd(\tilde{C}_\mu)$ para algún $\mu \geq 0$ (en el ejemplo anterior $0_3 \in bd(\tilde{C}_0)$) entonces $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra la necesidad de añadir alguna hipótesis adicional como la que se expresa en el teorema 2.2.20.

Ejemplo 2.2.19 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf} \quad -x_1 + 0x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0x_1 - x_2 \geq 0, \text{ si } t = 0, \\ & x_1 + tx_2 \geq 0, \text{ si } t = 2k - 1, k \in \mathbb{N}, \\ & x_1 + tx_2 \geq t, \text{ si } t = 2k, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

cuyos coeficientes ilustramos en la siguiente figura

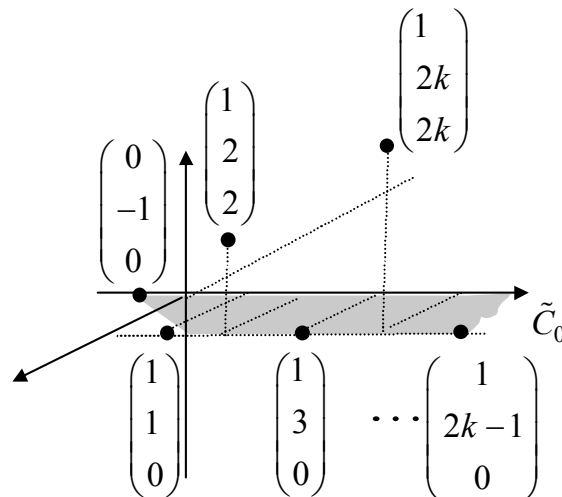


Figura 2.4: $0_3 \in bd(\tilde{C}_\mu)$ para todo $\mu \geq 0$ pero $\pi \notin cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$

Para todo $\mu \geq 0$ se tiene que $0_3 \notin bd(C_\mu)$ y $0_3 \in bd(\tilde{C}_\mu)$. Veremos que $\pi \notin cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Es fácil comprobar que la dirección $(0, 1, 1)'$ es de recesión de $cl(C_1)$ para todo $\pi_1 \in \Pi$ con $\delta(\pi_1, \pi) < +\infty$ (véanse los comentarios acerca del sistema reforzado en la sección 0.3). Sea $\pi_1 \in \Pi$ con $\delta(\pi_1, \pi) \leq \varepsilon < \frac{1}{8}$ y pongamos

$$\begin{pmatrix} a_0^1 \\ b_0^1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_{01}, -1 + \varepsilon_{02}, \varepsilon_{03})', \quad \begin{pmatrix} a_1^1 \\ b_1^1 \end{pmatrix} = (1 + \varepsilon_{11}, 1 + \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13})'.$$

Comprobaremos que $\pi_1 \in int(\Pi_c)$ si $\varepsilon_{01} > 0$ y $\pi_1 \in \Pi_i$ si $\varepsilon_{01} \leq 0$, de donde $\pi \notin cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. En efecto, si $\varepsilon_{01} > 0$ se tiene $a_{t1}^1 \geq \varepsilon_{01}$ para todo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (donde a_{t1}^1 representa la primera coordenada de a_t^1), luego $H_1 \subset [\varepsilon_{01}, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ y por tanto $0_3 \in ext(H_1)$, es decir, $\pi_1 \in int(\Pi_c)$. Supongamos ahora que $\varepsilon_{01} \leq 0$. Entonces

$$\frac{1 + \varepsilon_{11}}{1 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{01}} \begin{pmatrix} a_0^1 \\ b_0^1 \end{pmatrix} + \frac{-\varepsilon_{01}}{1 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{01}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ b_1^1 \end{pmatrix} = (0, \alpha, \beta)' \in C_1,$$

con $|\beta| < -\alpha$; luego, teniendo en cuenta que $(0, 1, 1)'$ es una dirección de recesión de $cl(C_1)$,

$$(0, 0, \beta - \alpha)' = (0, \alpha, \beta)' + (-\alpha)(0, 1, 1)' \in cl(C_1),$$

y por tanto $(0, 0, 1)' \in cl(N_1)$; es decir, $\pi_1 \in \Pi_i$.

Teorema 2.2.20 *Sea $\pi \in bd(\Pi_c)$. Supongamos que existen $u \in M^o$ y $\mu > 0$ tales que $\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq -\mu$ para todo $t \in T$ y $0_{n+1} \in bd(\tilde{C}_\mu)$, entonces $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$.*

Demostración. Tomemos $\pi \in bd(\Pi_c)$. Supongamos que existen $u \in M^o$, $u \neq 0_n$, y $\mu \geq 0$ tales que $\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq -\mu$ para todo $t \in T$, y supongamos también que $0_{n+1} \in bd(\tilde{C}_\mu)$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideremos el problema $\pi_r := (c, \sigma_r)$ siendo

σ_r , el sistema cuyos coeficientes son

$$\begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + [\frac{1}{r}b_t - a_t' u]_+ \begin{pmatrix} u/\|u\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } |b_t| > \mu, \\ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \frac{1}{r}b_t \begin{pmatrix} u/\|u\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } |b_t| \leq \mu, \end{cases}$$

para cada $t \in T$. Veamos que $\{\pi_r\}$ converge a π . En efecto, como $\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq -\mu$ entonces

$$\frac{1}{r}b_t - a_t' u = \left(\frac{1}{r} - 1\right) a_t' u - \frac{1}{r}(a_t' u - b_t) \leq \frac{\mu}{r}, \quad \forall t \in T, \forall r \in \mathbb{N},$$

donde hemos utilizado que $a_t' u \geq 0$ (pues $u \in M^\circ$). Luego tenemos que $d(\sigma_r, \sigma) = \frac{\mu}{r} \frac{\|u\|}{\|u\|_2^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, es decir, $\{\sigma_r\}$ converge a σ y consecuentemente $\{\pi_r\}$ converge a π .

Veamos ahora que $\pi_r \in \Pi_c$, y para ello veamos que $ru \in F_r$. En efecto, si $|b_t| > \mu$ entonces

$$\begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} ru \\ -1 \end{pmatrix} = r \left(a_t' u - \frac{1}{r}b_t + \left[\frac{1}{r}b_t - a_t' u \right]_+ \right) = r \left[a_t' u - \frac{1}{r}b_t \right]_+ \geq 0.$$

Si $|b_t| \leq \mu$ entonces

$$\begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} ru \\ -1 \end{pmatrix} = r \left(a_t' u - \frac{1}{r}b_t + \frac{1}{r}b_t \right) = r a_t' u \geq 0.$$

Veamos por último que $\pi_r \in bd(\Pi_c)$. Como $0_{n+1} \in bd(\tilde{C}_\mu) \subset cl(\tilde{C}_\mu)$, existe una sucesión $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^k = 1$ y $\lambda_t^k = 0$ si $|b_t| > \mu$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que

$0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$, de donde obtenemos que $0 = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k b_t$. Multiplicando

por $\frac{1}{r} \begin{pmatrix} u/\|u\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ se obtiene $0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \frac{1}{r} b_t \begin{pmatrix} u/\|u\|_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, y por tanto

$$0_{n+1} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} \in cl(C_r),$$

luego $\pi_r \in bd(\Pi_c)$ (de nuevo en virtud del teorema 0.3.3). ■

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior no es cierto en general. Obsérvese además que los conjuntos H , C , Z^- y Z^+ asociados a este problema coinciden con los del problema planteado en el ejemplo 2.2.13, y, sin embargo, este problema pertenece a $cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ mientras que aquél no.

Ejemplo 2.2.21 Consideremos el problema, en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf} -x \\ \text{s.a} \quad & 0x \geq 1, \text{ si } t = 0, \\ & \frac{1}{t}x \geq -t, \text{ si } t = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ & x \geq -t, \text{ si } t = 2k - 1, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

y tomemos $u = 1$ y $\mu \geq 1$ cualquiera. Se tiene que $\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq -\mu$ y $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$. Sin embargo, $0_2 \notin bd(\tilde{C}_\mu)$. Gráficamente tenemos la siguiente situación

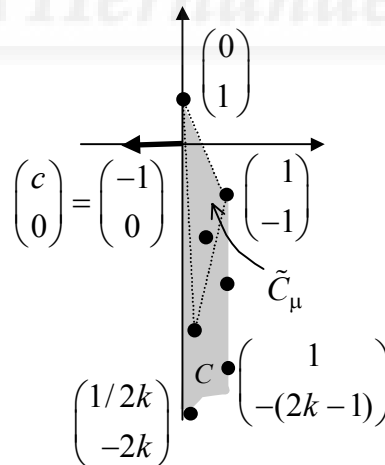


Figura 2.5: $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ pero $0_2 \notin bd(\tilde{C}_\mu)$ para todo $\mu \geq 0$

Para ver que $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ tómesese para cada $r \in \mathbb{N}$ el problema

$$\begin{aligned} \pi_r : \quad & \text{Inf} \quad -x \\ \text{s.a} \quad & 0x \geq 1, \quad \text{si } t = 0 \\ & \frac{1}{t}x \geq -t, \quad \text{si } t = 2k, \quad k \neq r, \quad k \in \mathbb{N}, \\ & 0x \geq -t, \quad \text{si } t = 2r, \\ & x \geq -t, \quad \text{si } t = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Para cada $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $\pi_r \in bd(\Pi_c)$ y $0_2 \in bd(C_r)_{2r}$ (donde $(C_r)_{2r}$ denota al “ C_μ ” correspondiente a σ_r y con $\mu = 2r$) luego $\pi_r \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$ en virtud del teorema 2.2.17. Además $\delta(\pi_r, \pi) = \frac{1}{2r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, y por tanto $\pi \in cl(bd(\Pi_c) \cap \Pi_c)$.

2.3 Distancia al conjunto de los problemas mal planteados

En esta sección abordamos el problema de determinar $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$ para un problema dado $\pi \in \Pi$. Analizaremos tres casos: $\pi \in cl(\Pi_s)$, $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ y $\pi \in int(\Pi_i)$. En el primer caso dispondremos de una expresión para la distancia al mal planteamiento (relativo a la resolubilidad) en términos de H y Z^- . En el segundo caso, se conserva una desigualdad de dicha expresión, teniéndose eventualmente la igualdad. En el tercer caso, en el que partimos de $\pi \in int(\Pi_i)$, en ocasiones la “distancia a la resolubilidad” coincide con la “distancia a la consistencia”, y otras veces es mayor.

En todas las situaciones anteriores (que cubren el caso $\pi \notin bd(\Pi_c)$) se dispondrá, al menos, de una cota inferior para $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$. El caso $\pi \in bd(\Pi_c)$ ha sido analizado en §2.2.3, donde hemos visto que, cuando $\{b_t, t \in T\}$ no está acotado, las herramientas H , C , Z^- y Z^+ no permiten caracterizar completamente la condición “ $\pi \in bd(\Pi_s)$ ”, y por tanto no se dispone de una expresión general para $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$ en este caso.

A lo largo de la sección presentamos diversos ejemplos con el fin de mostrar que, cuando un resultado proporciona una desigualdad, dicha desigualdad puede ser estricta o no serlo según el problema considerado. Se ilustran así diferentes situaciones que pueden presentarse, mostrando que ciertas restricciones redundantes pueden afectar considerablemente a la distancia al mal planteamiento, incluso para problemas de PL ordinaria en el plano y con “pocas restricciones” (véanse los ejemplos 2.3.9 y 2.3.10).

2.3.1 Distancia desde $cl(\Pi_s)$

El siguiente teorema establece una fórmula explícita para la distancia de un problema en la clausura del conjunto de los problemas resolubles a la frontera del mismo, esto es, al conjunto de los problemas mal planteados.

Teorema 2.3.1 *Sea $\pi \in cl(\Pi_s)$. Entonces*

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = \min \{d(0_{n+1}, bd(H)), d(0_n, bd(Z^-))\}. \quad (2.8)$$

Nótese que, en virtud de los teoremas 1.2.15 y 1.3.3, $d(0_{n+1}, bd(H)) = d(\sigma, bd(\Theta_c))$.

Demostración. Consideremos en primer lugar el caso $\pi \in bd(\Pi_s)$ y veamos que el miembro derecho de la tesis del teorema es nulo. En efecto, si $\pi \in int(\Pi_c)$, el teorema 2.2.4 asegura que $d(0_n, bd(Z^-)) = 0$; y si $\pi \in bd(\Pi_c)$, entonces los teoremas 1.2.14 y 1.2.15 garantizan que $d(0_{n+1}, bd(H)) = 0$.

En lo que sigue, pues, supondremos $\pi \in int(\Pi_s)$. Con el objetivo de establecer la desigualdad “ \leq ” veamos:

$$(a) \delta(\pi, bd(\Pi_s)) \leq d(0_{n+1}, bd(H)), \text{ y}$$

$$(b) \delta(\pi, bd(\Pi_s)) \leq d(0_n, bd(Z^-)).$$

Como $\pi \in int(\Pi_s)$, entonces $d(0_{n+1}, bd(H)) = d(\sigma, bd(\Theta_i)) = d(\sigma, \Theta_i) < +\infty$, y consecuentemente existe alguna sucesión $\{\sigma_r\} \subset \Theta_i$ tal que $\lim_r d(\sigma, \sigma_r) = d(\sigma, \Theta_i)$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideremos el problema $\pi_r := (c, \sigma_r)$. Como $\sigma_r \in \Theta_i$,

tenemos que $\pi_r \in \Pi \setminus \Pi_s$ y $\delta(\pi, \pi_r) \geq \delta(\pi, \Pi \setminus \Pi_s) = \delta(\pi, bd(\Pi_s))$. Tomando límites cuando r tiende a $+\infty$ en esta última expresión obtenemos que $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \leq \lim_r \delta(\pi, \pi_r) = \lim_r d(\sigma, \sigma_r) = d(\sigma, \Theta_i) = d(0_{n+1}, bd(H))$, con lo que concluimos (a).

Por otra parte, (b) es trivial si $Z^- = \mathbb{R}^n$. En otro caso, por ser $bd(Z^-)$ cerrado y no vacío, la distancia $d(0_n, bd(Z^-))$ se alcanza en cierto $a \in bd(Z^-)$, i.e., $d(0_n, bd(Z^-)) = \|a\|$. Además, por ser $a \in bd(Z^-)$ tenemos que $0_n \in bd(Z^-_a)$ donde

$$Z^-_a := \text{conv}(\{a_t - a, t \in T; -(c + a)\}).$$

Consideremos el problema $\pi_{\binom{-a}{0}} := \left(c + a, \sigma_{\binom{-a}{0}}\right)$ donde

$$\sigma_{\binom{-a}{0}} := \{(a_t - a)'x \geq b_t + 0, t \in T\}.$$

Como $0_n \in bd(Z^-_a)$, ha de ser $c + a \notin \text{int}(M_{-a})$ (véase el corolario 0.2.5), y el corolario 0.4.2 asegura que $\pi_{\binom{-a}{0}} \notin \text{int}(\Pi_s)$. Por tanto $\pi_{\binom{-a}{0}} \in bd(\Pi_s) \cup (\Pi \setminus \Pi_s)$ y

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = \delta(\pi, bd(\Pi_s) \cup (\Pi \setminus \Pi_s)) \leq \delta\left(\pi, \pi_{\binom{-a}{0}}\right) = \|a\|,$$

con lo que queda establecida (b) y la desigualdad deseada.

Sea ahora $\alpha := \min\{d(0_{n+1}, bd(H)), d(0_n, bd(Z^-))\}$, y tomemos como antes un punto $a \in bd(Z^-)$ donde se alcanza la distancia $d(0_n, bd(Z^-))$, suponiendo por el momento que $Z^- \neq \mathbb{R}^n$. Por (a) y (b) tenemos ya que $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \leq \alpha$ para todo $\pi \in \text{int}(\Pi_s)$. Para ver que se da la igualdad, es suficiente probar que todo problema $\pi_1 := (c^1, \sigma_1) \in \Pi$ a distancia de π estrictamente menor que α aún está en $\text{int}(\Pi_s)$. Tomamos entonces $\pi_1 \in \Pi$ en las condiciones anteriores. Por ser $\sigma \in \Theta_c$ tenemos que

$$d(\sigma, \sigma_1) \leq \delta(\pi, \pi_1) < \alpha \leq d(0_{n+1}, bd(H)) = d(\sigma, \Theta_i),$$

y, por tanto, como $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ debe ser también $\sigma_1 \in \text{int}(\Theta_c)$. Por otra parte, como $\pi \in \text{int}(\Pi_s)$, entonces $c \in \text{int}(M)$ en virtud del corolario 0.4.2, y por tanto $0_n \in \text{int}(Z^-)$ (por el corolario 0.2.5), luego, $\|a\| \text{cl}(B) \subset \text{cl}(Z^-)$. Además, como $\delta(\pi, \pi_1) < \alpha$, existe un $0 < \varepsilon < \|a\|$ tal que $\delta(\pi, \pi_1) \leq \alpha - \varepsilon \leq \|a\| - \varepsilon$. Como consecuencia inmediata del lema 1.3.1 se tiene que $\varepsilon \text{cl}(B) \subset \text{cl}(Z_1^-)$ y, por tanto, $0_n \in \text{int}(\text{cl}(Z_1^-)) = \text{int}(Z_1^-)$ (véase el teorema 0.2.3), y como además $\sigma_1 \in \text{int}(\Theta_c)$, el teorema 2.2.4 asegura que $\pi_1 \in \text{int}(\Pi_s)$, como queríamos demostrar.

Finalmente, en el caso $Z^- = \mathbb{R}^n$ se tiene que $\alpha = d(0_{n+1}, \text{bd}(H))$, y por tanto si $\delta(\pi, \pi_1) < \alpha$ se tiene $\pi_1 \in \text{int}(\Pi_c)$ y trivialmente $0_n \in \text{int}(Z_1^-)$, ya que $Z_1^- = \mathbb{R}^n$ (véase lema 1.3.1). Así $\pi_1 \in \text{int}(\Pi_s)$. ■

Los siguientes ejemplos ilustran la fórmula del teorema anterior. En el primero de ellos tenemos que $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = d(0_{n+1}, \text{bd}(Z^-)) < d(0_{n+1}, \text{bd}(H))$, mientras que en el segundo tenemos $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = d(0_{n+1}, \text{bd}(H)) < d(0_{n+1}, \text{bd}(Z^-))$. La norma considerada en ambos es la norma de Chebyshev, $\|\cdot\|_\infty$.

Ejemplo 2.3.2 Consideremos el problema de optimización lineal en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } \frac{1}{2}x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos que

$$H = \text{conv} \{(-1, 1, 0)', (1, 1, 0)'\} + \mathbb{R}_+ (0, 0, -1)',$$

y

$$Z^- = \text{conv} \left\{ (-1, 1)', (1, 1)', \left(0, -\frac{1}{2}\right)' \right\}.$$

Gráficamente se tiene

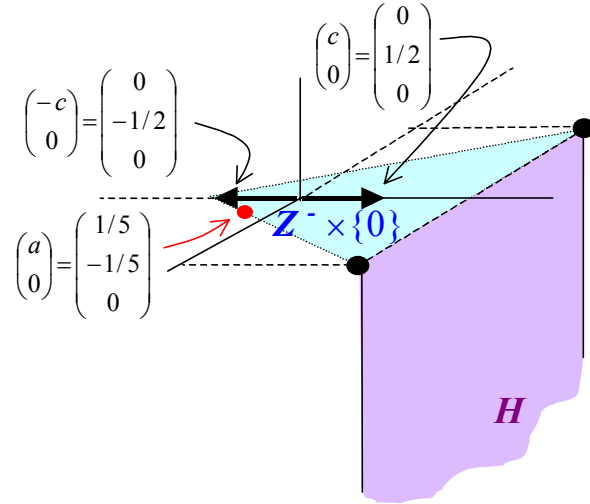


Figura 2.6: $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(0_2, bd(Z^-)) < d(0_3, bd(H))$

Al ser $0_3 \in ext(H)$, se tiene, $\pi \in int(\Pi_c)$ y como además $0_2 \in int(Z^-)$, resulta $\pi \in int(\Pi_s)$. Es fácil comprobar que

$$\frac{1}{5} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = d(0_2, bd(Z^-)) < d(0_3, bd(H)) = 1$$

Así, $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(0_2, bd(Z^-)) = \frac{1}{5}$.

Manteniendo la notación de la prueba del teorema 2.3.1, un problema de $bd(\Pi_s)$ donde se alcanza esta distancia viene dado por

$$\begin{aligned} \pi_{-(1/5, -1/5, 0)'} : \quad & Inf \quad \left(0 + \frac{1}{5}\right) x_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) x_2 \\ & \text{s.a} \quad \left(-1 - \frac{1}{5}\right) x_1 + \left(1 + \frac{1}{5}\right) x_2 \geq 0 - 0 \\ & \quad \quad \left(1 - \frac{1}{5}\right) x_1 + \left(1 + \frac{1}{5}\right) x_2 \geq 0 - 0 \end{aligned}$$

el cual se ha obtenido de perturbar el problema original, π , sumando $a = \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)'$ al vector de coeficientes de la función objetivo y sumando $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ a los vectores de coeficientes de las restricciones, con el fin de conseguir $0_2 \in bd(Z_{-a}^-)$, siendo aún $0_3 \in ext\left(H_{\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}}\right)$ y, consecuentemente, $\pi_{\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}} \in int(\Pi_c) \cap bd(\Pi_s)$.

Ejemplo 2.3.3 Consideremos ahora el problema de optimización lineal en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & \frac{1}{4}x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos ahora que

$$H = \text{conv} \left\{ (-1, 1, 0)', (1, 1, 0)', (0, \frac{1}{4}, 0)' \right\} + \mathbb{R}_+ (0, 0, -1)',$$

y

$$Z^- = \text{conv} \left\{ (-1, 1)', (1, 1)', (0, \frac{1}{4})', (0, -2)' \right\}$$

Gráficamente

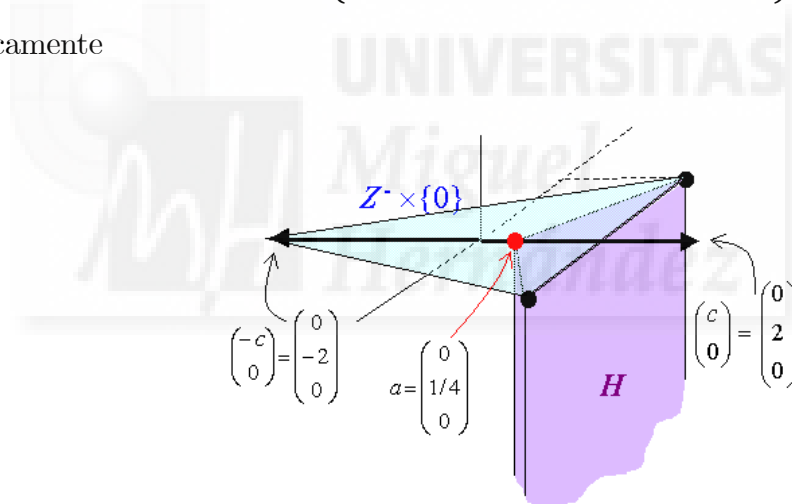


Figura 2.7: $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(0_3, bd(H)) < d(0_3, bd(Z^-))$

Dado que $0_3 \in \text{ext}(H)$, se tiene que $\pi \in \text{int}(\Pi_c)$ y, como además $0_2 \in \text{int}(Z^-)$, resulta $\pi \in \text{int}(\Pi_s)$. Se comprueba fácilmente que

$$\frac{1}{2} = d(0_2, bd(Z^-)) > d(0_3, bd(H)) = \left\| (0, \frac{1}{4}, 0)' \right\|_{\infty} = \frac{1}{4}$$

Así, $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(0_3, bd(H)) = \frac{1}{4}$.

Se comprueba fácilmente que el siguiente problema, π_1 , está en $bd(\Pi_s)$ y además en él se alcanza la distancia anterior.

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & \text{Inf } 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & (-1 - 0)x_1 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x_2 \geq 0 - 0, \\ & (1 - 0)x_1 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x_2 \geq 0 - 0, \\ & (0 - 0)x_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)x_2 \geq 0 - 0. \end{aligned}$$

Este problema se obtiene perturbando el problema original π , sumando a los coeficientes de las restricciones $-a = (0, -\frac{1}{4}, 0)'$, con el fin de conseguir $0_3 \in bd(H_1)$. Puesto que, de hecho, $0_3 \in bd(C_1)$, concluimos que $\pi_1 \in bd(\Pi_s)$ (en virtud del teorema 2.2.14).

2.3.2 Distancia desde $ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$

En esta subsección estudiamos la distancia de un problema $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ a $bd(\Pi_s)$. Veamos en primer lugar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4 *Sea $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$. Entonces*

$$d(0_n, bd(Z^-)) \leq d(0_{n+1}, bd(H)).$$

Demostración. Por el carácter cerrado y no vacío de $bd(Z^-)$, existe $a \in bd(Z^-)$ tal que $d(0_n, bd(Z^-)) = \|a\|$. Además, por ser $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ el teorema 2.2.4 asegura que $0_n \in ext(Z^-)$, y por tanto $d(0_n, bd(Z^-)) = d(0_n, cl(Z^-)) = \|a\|$. Sea $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in bd(H) \subset cl(H)$, entonces $\alpha \in cl(A) \subset cl(Z^-)$, luego $\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| \geq \|\alpha\| \geq \|a\|$ (véase la observación 2.1.1), y esto es cierto para todo $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in bd(H)$, por tanto $d(0_{n+1}, bd(H)) \geq \|a\|$ como queríamos demostrar. ■

Proposición 2.3.5 *Sea $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ con $d(0_n, bd(Z^-)) < d(0_{n+1}, bd(H))$, entonces*

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(0_n, bd(Z^-))$$

(la fórmula (2.8) se verifica también en este caso).

Demostración. Por ser $bd(Z^-)$ cerrado y no vacío, existe $a \in bd(Z^-)$ tal que $d(0_n, bd(Z^-)) = \|a\|$. Consideremos el problema $\pi_1 := (c + a, \sigma_{\binom{-a}{0}})$, donde $\sigma_{\binom{-a}{0}} := \{(a_t - a)'x \geq b_t, t \in T\}$. Tenemos por una parte que $0_n \in bd(Z_1^-)$ ($= bd(Z^- - a)$). Por otra parte, como $\pi \in int(\Pi_c)$, los teoremas 1.2.14 y 1.2.15 garantizan que $0_{n+1} \in ext(H)$ y por tanto $\|a\| < d(0_{n+1}, bd(H)) = d(0_{n+1}, cl(H))$, luego, al ser $\delta(\pi_1, \pi) = \|a\|$, el apartado (ii) del corolario 1.3.2 asegura que $0_{n+1} \in ext(H_1)$; y de nuevo por los teoremas 1.2.14 y 1.2.15, $\pi_1 \in int(\Pi_c)$. Por tanto, $\pi_1 \in bd(\Pi_s)$ en virtud del teorema 2.2.4 y consecuentemente $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \leq \delta(\pi, \pi_1) = \|a\|$.

Para ver la otra desigualdad tomemos $\tilde{\pi} \in \Pi$ con $\delta(\tilde{\pi}, \pi) < \|a\|$, entonces el lema 1.3.1 asegura que $0_n \in ext(\tilde{Z}^-)$ y $0_{n+1} \in ext(\tilde{H})$, luego $\tilde{\pi} \in int(\Pi_c) \cap ext(\Pi_s)$ en virtud de los teoremas 1.2.14, 1.2.15 y 2.2.4. Así, $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \geq \|a\|$. ■

Proposición 2.3.6 Sea $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ con $d(0_n, bd(Z^-)) = d(0_{n+1}, bd(H))$, entonces

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \geq d(0_{n+1}, bd(H)).$$

Demostración. Por ser $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ tenemos en virtud de los teoremas 1.2.14, 1.2.15 y 2.2.4 que $0_{n+1} \in ext(H)$ y $0_n \in ext(Z^-)$. Sea $\pi_1 \in \Pi$ con $\delta(\pi_1, \pi) < d(0_{n+1}, bd(H)) = d(0_n, bd(Z^-))$, entonces el lema 1.3.1 asegura que $0_{n+1} \in ext(H_1)$ y $0_n \in ext(Z_1^-)$, con lo cual, de nuevo por los teoremas 1.2.14, 1.2.15 y 2.2.4, $\pi_1 \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$, y por tanto $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \geq d(0_{n+1}, bd(H))$.

■

Seguidamente presentamos varios ejemplos que ponen de manifiesto que la fórmula (2.8) no puede extenderse al caso $\pi \in ext(\Pi_s) \cap int(\Pi_c)$ cuando $d(0_n, bd(Z^-)) = d(0_{n+1}, bd(H))$, ni siquiera en el contexto de la PL ordinaria. En todos ellos, con el fin de determinar $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$, se plantea la cuestión de hallar un nuevo problema π_1 que, encontrándose a la mínima distancia posible del problema nominal π ,

verifique alguna de las condiciones del teorema 2.2.14, esto es, $0_{n+1} \in \text{ext}(H_1)$ y $0_n \in \text{bd}(Z_1^-)$, o bien $0_{n+1} \in \text{bd}(H_1) \cap \text{bd}(C_1)$, o bien $0_{n+1} \in \text{bd}(H_1)$ y $0_n \in \text{bd}(Z_1^+)$. De nuevo, la norma considerada en los siguientes ejemplos es la norma de Chebyshev, $\|\cdot\|_\infty$.

Ejemplo 2.3.7 Consideremos el problema de PL ordinaria, en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf} - 10x \\ \text{s.a} \quad & x \geq 9, \\ & x \geq 10, \\ & 4x \geq 9, \\ & 4x \geq 10. \end{aligned}$$

Se tiene que $\pi \in \text{int}(\Pi_c) \cap \text{ext}(\Pi_s)$, $d(0, \text{bd}(Z^-)) = 1 = d(0_2, \text{bd}(H))$. Puede comprobarse que $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = \delta(\pi, \pi_1) = 4 > d(0_2, \text{bd}(H))$, siendo

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & \text{Inf} - 10x \\ \text{s.a} \quad & -3x \geq 9, \\ & -3x \geq 10, \\ & 0x \geq 9, \\ & 0x \geq 10. \end{aligned}$$

En efecto, si $\pi_2 \in \Pi$ es tal que $\delta(\pi, \pi_2) < 4$, el lema 1.3.1 garantiza que $0 \in \text{int}(Z_2^+)$ y que $0_2 \in \text{ext}(C_2)$. La elección de los coeficientes del problema asegura que la única forma de que $0_2 \in \text{ext}(H_2)$ es que $H_2 \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, en cuyo caso será también $0_2 \in \text{ext}(Z_2^-)$. Es, pues, imposible que $\pi_2 \in \text{bd}(\Pi_s)$ de acuerdo con el teorema 2.2.14.

Seguidamente ilustramos gráficamente los conjuntos H , C , Z^- y Z^+ asociados a π , así como la perturbación efectuada para conseguir π_1 .

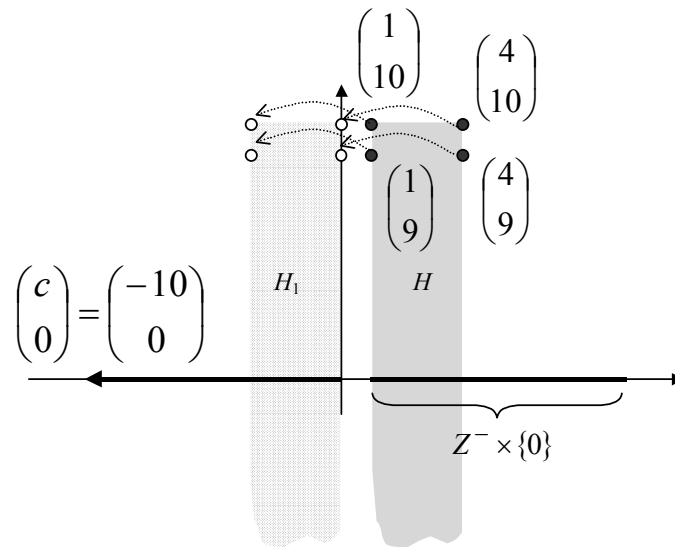


Figura 2.8: $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(0, bd(Z^+))$

Obsérvese que, en este caso, los problemas de $bd(\Pi_s)$ en los que se alcanza la distancia $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$ se encuentran verificando la tercera de las condiciones (del teorema 2.2.14) referidas en párrafos anteriores.

Ejemplo 2.3.8 Considérese el problema de PL ordinaria, en \mathbb{R} , con el mismo sistema de restricciones del ejemplo anterior y el nuevo $c = -2$. Obsérvese que ahora $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) (= 2)$ puede alcanzarse tanto en problemas que verifican la primera como la tercera de las condiciones del teorema 2.2.14, aunque no la segunda. Por ejemplo, dicha distancia se alcanza en cualquiera de los problemas

$$\pi_1 := \text{Inf} \{0x \mid x \geq 9, x \geq 10, 4x \geq 9, 4x \geq 10\},$$

o

$$\pi_2 := \text{Inf} \{0x \mid 0x \geq 9, 0x \geq 10, 3x \geq 9, 3x \geq 10\}.$$

Ejemplo 2.3.9 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } 6x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 10, \quad t = 1, \\ & 3x_1 + 3x_2 \geq 10, \quad t = 2, \\ & -2x_1 + 3x_2 \geq 10, \quad t = 3, \\ & -2x_1 + x_2 \geq 10, \quad t = 4. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $\pi \in \text{int}(\Pi_c) \cap \text{ext}(\Pi_s)$ y $d(0_2, \text{bd}(Z^-)) = 1 = d(0_3, \text{bd}(H))$. Veamos ahora que $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) > 1$. La elección de $b_t = 10, t = 1, \dots, 4$, deja entrever que el problema $\pi_1 \in \text{bd}(\Pi_s)$ más próximo a π no verificará la condición $0_3 \in \text{bd}(C_1)$. Buscaremos entonces un problema $\pi_1 = (c^1, \sigma_1)$, con $\sigma_1 = \{(a_t^1)'x \geq b_t^1, t = 1, \dots, 4\}$ como el indicado en la siguiente figura, en la que ilustramos gráficamente los conjuntos C y Z^+ , asociados a π , así como los asociados a π_1 . Puede comprobarse que la mínima perturbación (en $\|\cdot\|_\infty$) para la cual c^1 es un múltiplo de a_1^1 corresponde a los vectores $c^1 = \begin{pmatrix} 81/11 \\ -18/11 \end{pmatrix}$ y $a_1^1 = \begin{pmatrix} 18/11 \\ -4/11 \end{pmatrix}$, ambos múltiplos de $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$. Modificamos ahora a_4 para conseguir $0_3 \in \text{bd}(H_1)$ y $0_2 \in \text{bd}(Z_1^+)$, tomando por ejemplo $a_4^1 = \begin{pmatrix} -27/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$. Los restantes coeficientes se mantienen inalterados. Por motivos de simplicidad y dado que $b_t^1 = b_t = 10$, para $t = 1, \dots, 4$, representamos la gráfica en el plano $y_3 = 10$.

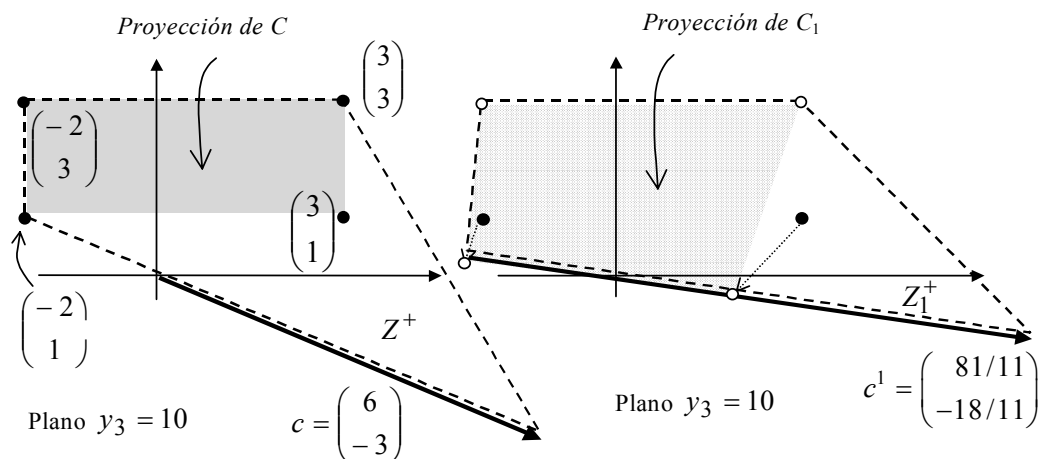


Figura 2.9: Perturbación de π para obtener la condición (iii) del Teorema 2.2.14.

Comprobaremos a continuación que si $\pi_2 = (c^2, \sigma_2) \in \Pi$ verifica $\delta(\pi_2, \pi) < \delta(\pi_1, \pi) = \frac{15}{11}$, entonces $\pi_2 \notin \Pi_s$. En efecto, en caso contrario y apelando al teorema 0.4.3, tendremos que $c^2 \in M_2$ (que es un cono cerrado por ser finitamente generado). Además, pueden comprobarse fácilmente las siguientes desigualdades relativas a $\sigma_2 = \{(a_t^2)' x \geq b_t^2, t = 1, \dots, 4\}$:

$$(a_1^2)' \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} > 0, (a_2^2)' \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} > 0, (a_3^2)' \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} < 0, (a_4^2)' \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} < 0, \quad (2.9)$$

$$(a_1^2)' \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} > 0, (a_2^2)' \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} > 0, (a_3^2)' \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} > 0, \quad (2.10)$$

$$(c^2)' \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} > 0, \quad (2.11)$$

$$(c^2)' \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} < 0. \quad (2.12)$$

La condición $c^2 \in M_2$ junto con (2.10) y (2.12), implica $(a_4^2)' \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} < 0$, luego los vectores a_1^2, a_3^2, a_4^2 y c^2 están respectivamente en el primero, segundo, tercero y cuarto de los cuadrantes determinados por los vectores (ortogonales) $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, de donde se deduce que $M_2 = \mathbb{R}^2$, esto es, $0_2 \in \text{int}(\text{conv}(\{a_t^2, t = 1, \dots, 4\}))$, y puesto que $b_t^2 \geq 10 - \frac{15}{11} > 0$ para todo $t = 1, \dots, 4$, concluimos que $0_3 \in \text{int}(H_2)$, es decir, $\pi_2 \in \text{int}(\Pi_i)$, en contradicción con la suposición $\pi_2 \in \Pi_s$. Concluimos así que $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = \delta(\pi, \pi_1) = \frac{15}{11}$.

Ejemplo 2.3.10 Consideremos el problema de PL, en \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } 6x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 10, \quad t = 1, \\ & 3x_1 + 3x_2 \geq 10, \quad t = 2, \\ & -2x_1 + 3x_2 \geq 10, \quad t = 3, \\ & -2x_1 + x_2 \geq 10, \quad t = 4, \\ & 0x_1 + x_2 \geq 10, \quad t = 5. \end{aligned}$$

Nótese que este problema resulta de añadir al del ejemplo anterior únicamente

la última restricción, cuyo vector de coeficientes es combinación convexa de los vectores asociados a las restricciones primera y cuarta (en particular la nueva restricción es redundante). El problema sigue verificando las condiciones: $\pi \in \text{int}(\Pi_c) \cap \text{ext}(\Pi_s)$, y $d(0_2, \text{bd}(Z^-)) = 1 = d(0_3, \text{bd}(H))$. Sin embargo, ahora $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = d(0_3, \text{bd}(H))$, puesto que $d(0_3, \text{bd}(H))$ es cota inferior para la distancia de π a $\text{bd}(\Pi_s)$ (véase la proposición 2.3.6) y el problema π_1 que resulta de reemplazar la última restricción de π por la nueva “ $0x_1 + 0x_2 \geq 10$ ” verifica que $\pi_1 \in \text{bd}(\Pi_s)$ (pues $0_{n+1} \in \text{bd}(H_1)$ y $0_n \in \text{bd}(Z_1^+)$) y $\delta(\pi, \pi_1) = 1$. Seguidamente ilustramos gráficamente estos elementos, proyectándolos sobre el plano $y_3 = 10$ (nótese que $b_t = 10$, para todo $t = 1, \dots, 4$).

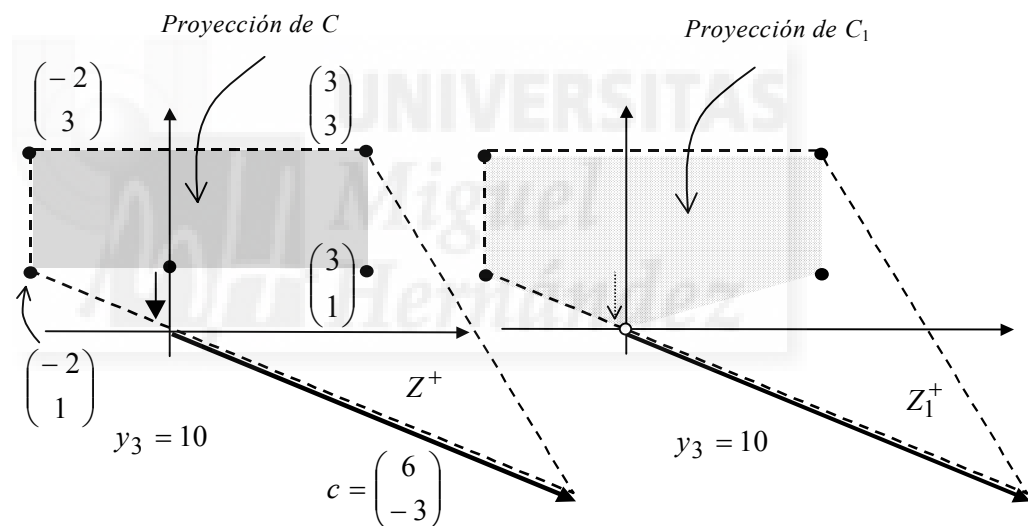


Figura 2.10: Perturbación de π para obtener la condición (iii) del Teorema 2.2.14.

2.3.3 Distancia desde $\text{int}(\Pi_i)$

En esta subsección mostramos el hecho de que para problemas de $\text{int}(\Pi_i)$, si bien la expresión $d(0_{n+1}, \text{bd}(H)) (= \delta(\pi, \Pi_c)$ si $\sigma \notin \Theta_\infty$) establecida en el teorema 2.3.1 proporciona una cota inferior para $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s))$, dicha cota puede no alcanzarse.

Proposición 2.3.11 Sea $\pi \in \text{int}(\Pi_i)$, entonces

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) \geq d(0_{n+1}, bd(H)).$$

La demostración es trivial en tanto que $\Pi_s \subset \Pi_c$. Obsérvese que en el caso en que $\sigma \in \Theta_\infty$, se tiene que $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = +\infty$.

Observación 2.3.12 Si $\pi = (c, \sigma) \in \text{int}(\Pi_i)$, con $\sigma \notin \Theta_\infty$, y H contiene una bola abierta en \mathbb{R}^{n+1} de radio ρ , entonces, proyectando sobre las n -primeras coordenadas tendremos que $\rho B \subset \text{int}(A) \subset \text{int}(Z^-)$. Por tanto $d(0_{n+1}, bd(H)) \leq d(0_n, bd(Z^-))$. De esta forma, a lo largo de la presente sección hemos establecido que la expresión $\min\{d(0_{n+1}, bd(H)), d(0_n, bd(Z^-))\}$ constituye en todos los casos una cota inferior de $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$.

Seguidamente presentamos dos ejemplos. Mientras que en el primero de ellos $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) > d(0_{n+1}, bd(H))$, en el segundo se tiene la igualdad entre ambas distancias. En los dos casos, dado $\pi \in \text{int}(\Pi_i)$ se indicará la perturbación que puede efectuarse para conseguir un nuevo problema $\pi_1 \in bd(\Pi_s)$ tal que $\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = d(\pi, \pi_1)$. Como en los ejemplos anteriores, para la búsqueda de π_1 , resulta clave la caracterización de $bd(\Pi_s)$ establecida en el teorema 2.2.14. La norma considerada en los mismos es de nuevo la norma de Chebyshev, $\|\cdot\|_\infty$.

Ejemplo 2.3.13 Consideremos el problema de PL, en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf} - 3x \\ \text{s.a} \quad & -2x \geq 5, \\ & x \geq 5, \\ & -2x \geq 4, \\ & x \geq 4. \end{aligned}$$

Se tiene que $\pi \in \text{int}(\Pi_i)$, $d(0_2, \text{bd}(H)) = 1$. Se comprueba inmediatamente que

$$\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = \delta(\pi, \pi_1) = 1 = d(0_2, \text{bd}(H))$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & \text{Inf} \quad -3x \\ \text{s.a} \quad & -3x \geq 5, \\ & 0x \geq 5, \\ & -3x \geq 4, \\ & 0x \geq 4. \end{aligned}$$

Seguidamente ilustramos gráficamente la perturbación efectuada sobre los coeficientes de π (y en consecuencia sobre los conjuntos H , C , Z^- y Z^+).

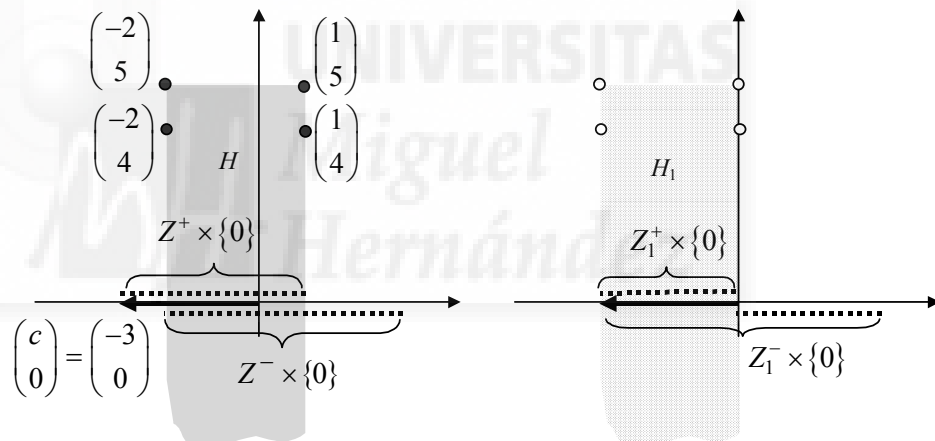


Figura 2.11: $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = d(0_2, \text{bd}(H))$

Ejemplo 2.3.14 Consideremos el problema de PL, en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf} \quad -3x \\ \text{s.a} \quad & -x \geq 5, \\ & 2x \geq 5, \\ & -x \geq 4, \\ & 2x \geq 4. \end{aligned}$$

Se tiene que $\pi \in \text{int}(\Pi_i)$, $d(0_2, \text{bd}(H)) = 1$. Se comprueba fácilmente que

$$\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) = \delta(\pi, \pi_1) = 2 > d(0_2, \text{bd}(H))$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & \text{Inf} \quad -3x \\ \text{s.a} \quad & -3x \geq 5, \\ & 0x \geq 5, \\ & -3x \geq 4, \\ & 0x \geq 4. \end{aligned}$$

La ilustración gráfica de la perturbación efectuada sobre los vectores de coeficientes de π quedaría:

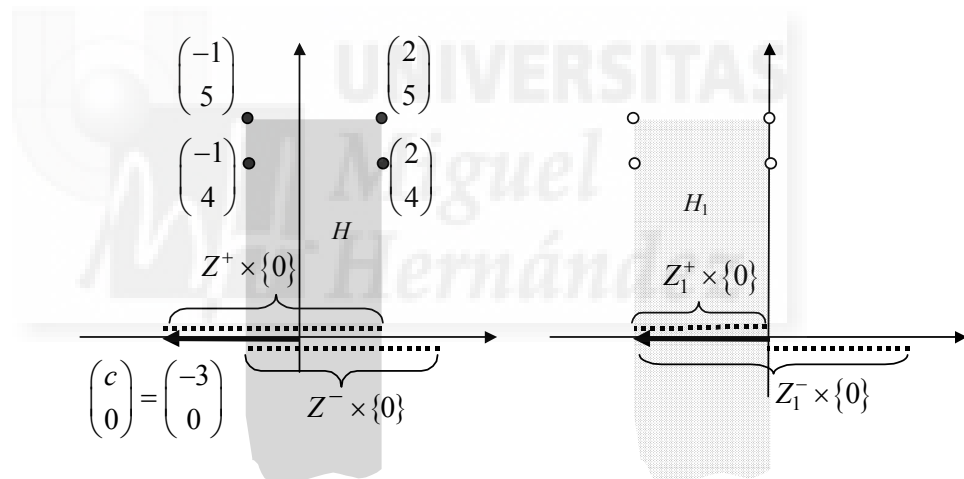


Figura 2.12: $\delta(\pi, \text{bd}(\Pi_s)) > d(0_2, \text{bd}(H))$

Capítulo 3

Aplicaciones de la distancia al mal planteamiento

3.1 Introducción

En el Capítulo 1 comentamos que, además de constituir en sí misma una medida cuantitativa de la estabilidad de un sistema dado, la distancia al mal planteamiento (relativo a la consistencia) constiyuye un ingrediente clave en diferentes aplicaciones desarrolladas en [18], [19], [41], [44], [45] y [52] en diferentes contextos de optimización lineal. En este capítulo se desarrollan algunas aplicaciones de esta distancia en nuestro contexto de PLSI, destacando la utilidad de las expresiones dadas en los teoremas 1.3.3 y 1.4.3. En primer lugar, analizaremos (en §3.2) algunas propiedades de lipschitzianidad (tratadas por ejemplo en Klatte y Kummer [35]) para la (multi)función conjunto factible, $\mathcal{F} : \Theta \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, que a cada sistema $\sigma \in \Theta$ le hace corresponder su conjunto factible, $\mathcal{F}(\sigma) := F$, las cuales implican, por su parte, las correspondientes propiedades de regularidad para \mathcal{F}^{-1} . En particular obtenemos, mediante un enfoque primal directo, algunos resultados de [44] que se desarrollan allí con un tratamiento primal-dual en el contexto de los sistemas lineales cónicos y que requieren, por tanto, un conocimiento profundo de la teoría de la dualidad, así como de diferentes nociones de consistencia asintótica y valor óptimo asintótico

(véanse [1] y [16]). No obstante, en la última sección de este capítulo, obtenemos algunos de estos resultados, en nuestro contexto de PLSI, siguiendo el enfoque de Renegar ([44]), requiriendo, además de la utilización de noción de solución asintótica y valor óptimo asintótico, la aplicación de diferentes resultados de topología referentes a redes y filtros en \mathbb{R}^T , ya que nuestro espacio paramétrico no es normado (cuando T es infinito) y, por tanto, las técnicas de espacios normados utilizadas en [44] no pueden ser aplicadas.

Los resultados del Capítulo 1 también serán de utilidad en §3.3 a la hora de obtener cotas para la complejidad del algoritmo del elipsoide cuyo objetivo es encontrar soluciones factibles del sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$. En particular, el valor de consistencia de este sistema, introducido en la sección 1.4, nos permite obtener un refinamiento en la cota de complejidad sobre el número de iteraciones dada en [19].

Un nuevo tipo de aplicaciones de la distancia al mal planteamiento para sistemas de desigualdades lineales surge de la teoría de la estabilidad para el problema de optimización lineal completo $\pi \equiv \text{Inf} \{c'x \mid a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ (T es de nuevo un conjunto de índices arbitrario), abreviado por (c, σ) . En el capítulo anterior proporcionamos una expresión para la distancia de un problema en la clausura del conjunto de los problemas resolubles a la frontera de dicho conjunto. La citada expresión (teorema 2.3.1) es el mínimo de dos términos, el primero es la distancia del sistema asociado, σ , a la inconsistencia, mientras que el segundo término es, como veremos en la sección 3.6, la distancia a la inconsistencia del problema dual asociado al par (c, σ) (véase [21, Capítulo 8] para detalles acerca de la dualidad en este contexto semi-infinito). Este segundo término se utilizará también para encontrar bolas centradas en el origen conteniendo al conjunto óptimo (o a ciertos conjuntos de nivel inferior) de π , como veremos en §3.4. Los resultados de esta sección se aplican en §3.5 para obtener una constante de Lipschitz relativa al valor óptimo del problema, cuya formulación contiene la distancia al mal planteamiento (relativo a la consistencia) en su denominador.

La sección 3.6 de este capítulo está dedicada a analizar la estabilidad de un problema de PLSI mediante un enfoque que combina el tratamiento del problema primal y del problema dual asociado. En una primera etapa se estudia la estabilidad del problema respecto de la consistencia del problema dual. Para ello se caracteriza la frontera del conjunto formado por los problemas dual-consistentes (que constituye un tipo de mal planteamiento para problemas) y se calcula la distancia de un problema a esta frontera, que, como hemos comentado anteriormente, está estrechamente relacionada con la distancia al mal planteamiento con respecto a la resolubilidad. En la siguiente etapa se analiza la estabilidad de los problemas que son al mismo tiempo primal y dual consistentes. El estudio de tales problemas ha sido de interés en diferentes trabajos a lo largo de la literatura; véanse, por ejemplo, Williams [53] y Robinson [47]. En los últimos años, diferentes autores, en el contexto de los sistemas lineales cónicos, han mostrado la relación entre la distancia a la frontera de tales problemas (que constituye otro tipo de mal planteamiento) y ciertas propiedades de las soluciones a lo largo de la trayectoria central de un problema de Programación Lineal (véase [41]). Por su parte, [40] proporciona, combinando sus resultados con los de [47], una caracterización de la frontera y el interior de estos problemas. La distancia de un problema dual-consistente al conjunto de los problemas dual-inconsistentes es tratada en [44] donde se muestra su relación con ciertas características de los problemas, tales como el tamaño de los conjuntos óptimos o la sensibilidad de los valores óptimos de problemas perturbados. En nuestro contexto, demostramos, utilizando la caracterización del interior del conjunto formado por los problemas primal-dual consistentes dada en [25], que los problemas consistentes con dual consistente sólo difieren de los problemas resolubles en algunos problemas de la frontera y, por tanto, para calcular la distancia de un problema al mal planteamiento en este último sentido, podemos utilizar las expresiones que obtuvimos en el Capítulo 2 para los problemas resolubles.

3.2 Estabilidad del conjunto factible: lipschitzianidad y regularidad

A partir de ahora denotaremos por $\text{gph}\mathcal{F}$ al grafo de la (multi)función conjunto factible \mathcal{F} ; i.e., $\text{gph}\mathcal{F} := \{(\sigma, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathcal{F}(\sigma)\}$. La multifunción inversa de \mathcal{F} , $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \Theta$, viene dada por $\mathcal{F}^{-1}(x) := \{\sigma \in \Theta \mid x \in \mathcal{F}(\sigma)\}$. En esta sección probaremos que \mathcal{F}^{-1} es *métricamente regular* en cualquier $(x^0, \sigma_0) \in \text{gph}\mathcal{F}^{-1}$, con $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$; esto es, existen sendos entornos, U de x^0 y V de σ_0 , y un escalar positivo L (*rango*), tal que, para todo $z \in U$ y todo $\sigma \in V$, se tiene

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq L d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)),$$

o, equivalentemente, $d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq L d(\sigma, \sigma_1)$, siempre que $z \in \mathcal{F}(\sigma_1)$. De hecho, el corolario 3.2.6 proporcionará una expresión explícita para L , relacionada íntimamente con la distancia al mal planteamiento $d(\sigma_0, \Theta_i)$. El lema 1.12 de [35], demostrado para una multifunción genérica entre espacios métricos (véase también [30]), establece que \mathcal{F}^{-1} es métricamente regular en $(x^0, \sigma_0) \in \text{gph}\mathcal{F}^{-1}$ si y sólo si \mathcal{F} es *pseudo-lipschitziana* (también llamada *propiedad de Aubin*) en $(\sigma_0, x^0) \in \text{gph}\mathcal{F}$. Una propiedad más débil surge cuando escribimos $\sigma = \sigma_0$ en la definición anterior: \mathcal{F}^{-1} satisface una *cota de error local* en $(x^0, \sigma_0) \in \text{gph}\mathcal{F}^{-1}$ si existe un entorno U de x^0 y una constante positiva L , de manera que $d(z, \mathcal{F}(\sigma_0)) \leq L d(\sigma_0, \mathcal{F}^{-1}(z))$ para todo $z \in U$. Esta propiedad resulta ser equivalente a la *tranquilidad* (*calmness*) de \mathcal{F} en $(\sigma_0, x^0) \in \text{gph}\mathcal{F}$ (véase de nuevo [35]). En esta sección se muestra también la estrecha relación entre los conceptos de lipschitzianidad analizados en esta memoria y ciertas desigualdades de tipo Hoffman (véanse el teorema 3.2.4 y el corolario 3.2.9). En este sentido, nuestros resultados están conectados con los de Dontchev, Lewis y Rockafellar [14], donde la relación entre la *distancia a la infactibilidad* y el llamado *módulo de regularidad métrica* se explora en el contexto del análisis variacional.

Los resultados de [44] antes aludidos, concretamente el Teorema 1.1(2) y el segundo párrafo de la página 77, donde se generaliza dicho teorema, tratan con un sistema de tipo (1.9), donde X es un espacio normado reflexivo, e Y es un espacio normado arbitrario. A continuación trasladamos estos resultados a nuestro contexto, pero asumiendo que T es finito (obsérvese que, en nuestro contexto, $Y = \mathbb{R}^T$ no es un espacio normado cuando T es infinito).

Si identificamos $a \in \mathbb{R}^n$ con el operador lineal $a \mapsto a'x$, una norma apropiada para \mathbb{R}^{n+1} sería

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| := \max \{ \|a\|_*, |b| \}. \quad (3.1)$$

Concretamente, cuando T es finito, el sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ puede ser reescrito en su forma matricial $Ax \geq b$ (donde la fila t -ésima de la matriz A es a'_t , y la componente t -ésima del vector b es b_t). En nuestro contexto, si consideramos la norma de Chebyshev en \mathbb{R}^T , la norma dada en [44, p. 75] (véase (1.10)) es

$$\begin{aligned} \max \{ \|A\|, \|b\| \} &= \max \left\{ \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \|b\| \right\} \\ &= \max_{t \in T} \max \{ \|a_t\|_*, |b_t| \} = \max_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

En [44, p.77], para $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$ y para cada $z \in \mathbb{R}^n$, se obtiene la siguiente desigualdad

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma_0)) \leq (\|b_1 - b\| + \|A_1 - A\| \|z\|) \frac{\max \{1, \|z\|\}}{d(\sigma_0, \Theta_i)}, \quad (3.3)$$

para cualquier $\sigma_1 := \{A_1 x \geq b_1\} \in \mathcal{F}^{-1}(z)$. Aplicando (3.2) se consigue

$$\begin{aligned} \|b_1 - b\| + \|A_1 - A\| \|z\| &\leq (1 + \|z\|) \max \{ \|A_1 - A\|, \|b_1 - b\| \} \\ &\leq (1 + \|z\|) \max_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 - a_t \\ b_t^1 - b_t \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Ahora, (3.3) nos conduce a

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma_0)) \leq \frac{(1 + \|z\|) \max\{1, \|z\|\}}{d(\sigma_0, \Theta_i)} d(\sigma_0, \sigma_1), \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual proporciona

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma_0)) \leq \frac{(1 + \|z\|) \max\{1, \|z\|\}}{d(\sigma_0, \Theta_i)} d(\sigma_0, \mathcal{F}^{-1}(z)), \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Si en (3.4) consideramos $z \in x^0 + \rho \text{cl}(B)$, con $x^0 \in \mathcal{F}(\sigma_0)$, entonces \mathcal{F}^{-1} satisface una cota de error local en (x^0, σ_0) con rango

$$L = \frac{(1 + \|x^0\| + \rho) \max\{1, \|x^0\| + \rho\}}{d(\sigma_0, \Theta_i)}.$$

El teorema 3.2.4 generalizará (3.4) al caso en que T es arbitrario y únicamente se requiere la propiedad (2.1) para la norma utilizada en \mathbb{R}^{n+1} , esto es,

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right\| \text{ para todo } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

(véase la observación 3.2.5 relativa a la particularización del teorema 3.2.4 a la norma (3.1)).

De ahora en adelante asumiremos que la norma considerada en \mathbb{R}^{n+1} satisface (2.1) y la norma en \mathbb{R}^n es arbitraria.

Los siguientes dos lemas serán herramientas claves en el desarrollo de la aplicación que estamos tratando. El primero de ellos es una consecuencia de los teoremas 1.2.15, 1.3.3 y 1.4.3.

Lema 3.2.1 Sean $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\} \in \text{int}(\Theta_c)$ y $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$ para cierta sucesión $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$. Entonces

$$\limsup_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \leq \frac{\left\| \begin{pmatrix} a \\ [-b]_+ \end{pmatrix} \right\|}{d(\sigma, \Theta_i)},$$

donde $[\alpha]_+$ es la parte positiva de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. En primer lugar veamos que, bajo las hipótesis actuales, la sucesión $\{\gamma_r\} \subset \mathbb{R}_+$ dada por $\gamma_r := \sum_{t \in T} \lambda_t^r$, $r \in \mathbb{N}$, está acotada. En otro caso, podríamos suponer sin pérdida de generalidad que $\lim_r \gamma_r = +\infty$ y, entonces,

$$0_{n+1} = \lim_r \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^r}{\gamma_r} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in cl(C),$$

lo cual representa una contradicción con el hecho de que $\sigma \in int(\Theta_c)$ (teorema 0.3.3).

Ahora, supongamos que $\gamma := \limsup_r \gamma_r > 0$ (si $\gamma = 0$ la desigualdad buscada es trivial). Tomando cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y multiplicando en la expresión de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ por $\frac{\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}$ tenemos

$$\frac{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \frac{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \geq \gamma \inf_{t \in T} \frac{a_t' x - b_t}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*},$$

y, por tanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \geq \gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{t \in T} \frac{a_t' x - b_t}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} = \gamma d(\sigma, \Theta_i), \quad (3.5)$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema 1.4.3. Además, como el

miembro izquierdo de (3.5) representa al valor de consistencia del sistema consistente formado sólomente por la restricción “ $a'x \geq b$ ”, si aplicamos los teoremas 1.2.15 y 1.3.3, podremos escribir

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} &= d \left(0_{n+1}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \min_{\lambda \geq 0} \left\| \begin{pmatrix} a \\ b - \lambda \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ [-b]_+ \end{pmatrix} \right\|, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene a partir de la observación 2.1.1. Así pues, concluimos que

$$\gamma \leq \frac{\left\| \begin{pmatrix} a \\ [-b]_+ \end{pmatrix} \right\|}{d(\sigma, \Theta_i)}.$$

■

El siguiente lema establece una generalización, para normas arbitrarias, del resultado acerca de la mejor aproximación, dado en la sección 0.2, para la norma euclídea (véase (0.6)), y será de utilidad en el teorema que le sigue.

Lema 3.2.2 *Sea $F \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío, y sea $z \in \mathbb{R}^k \setminus F$. Consideremos en \mathbb{R}^k una norma arbitraria $\|\cdot\|$. Entonces, $\hat{z} \in F$ es una mejor aproximación de z en F (i.e., $\|\hat{z} - z\| = d(z, F)$) si y sólo si existe un vector $u \in \mathbb{R}^k$, con $\|u\|_* = 1$, tal que*

- (i) $u'x \geq u'\hat{z}$ para todo $x \in F$, y
- (ii) $u'(\hat{z} - z) = \|\hat{z} - z\|$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que \hat{z} es una mejor aproximación de z en F , lo cual implica obviamente que los conjuntos $\text{rint}(z + \|\hat{z} - z\| \text{cl}(B))$ ($= \text{int}(z + \|\hat{z} - z\| \text{cl}(B))$) y $\text{rint}(F)$ no tienen puntos en común y, entonces, [48, Teorema 11.3] garantiza la existencia de un vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$, con $u \neq 0_k$ (pode-

mos suponer sin pérdida de generalidad que $\|u\|_* = 1$), tal que

$$\begin{aligned} u'x &\geq v \text{ para todo } x \in F, \text{ mientras que} \\ u'y &\leq v \text{ para todo } y \in z + \|\hat{z} - z\| \text{cl}(B). \end{aligned} \quad (3.6)$$

El hecho de que $\hat{z} \in F$ implica que $v = u'\hat{z}$, puesto que \hat{z} satisface ambas desigualdades en (3.6). Así pues, el vector u satisface la condición (i). Ahora, veamos que $u'(\hat{z} - z) = \|\hat{z} - z\|$. La desigualdad “ \leq ” es inmediata, supongamos entonces, razonando por reducción al absurdo, que $u'(\hat{z} - z) < \|\hat{z} - z\|$. Por el lema 0.2.1 se puede obtener fácilmente la siguiente representación de $z + \|\hat{z} - z\| \text{cl}(B)$:

$$z + \|\hat{z} - z\| \text{cl}(B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid w'(x - z) \leq \|\hat{z} - z\| \text{ para todo } w \in \text{bd}(B_*) \right\}.$$

Por (3.6), la desigualdad $-u'x \geq -u'\hat{z}$ es una consecuencia del sistema $\{-w'x \geq -w'z - \|\hat{z} - z\|, w \in \text{bd}(B_*)\}$, y el Lema de Farkas asegura entonces la existencia de $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(\text{bd}(B_*))}$ y $\{\mu_r\} \subset \mathbb{R}_+$ tales que

$$\begin{pmatrix} -u \\ -u'\hat{z} \end{pmatrix} = \lim_r \left(\sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r \begin{pmatrix} -w \\ -w'z - \|\hat{z} - z\| \end{pmatrix} + \mu_r \begin{pmatrix} 0_k \\ -1 \end{pmatrix} \right). \quad (3.7)$$

Multiplicando ambos miembros de (3.7) por $\begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix}$ se tiene

$$u'(\hat{z} - z) = \lim_r \left(\sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r \|\hat{z} - z\| + \mu_r \right) \geq \|\hat{z} - z\| \limsup_r \sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r,$$

y, por tanto, $\limsup_r \sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r < 1$ (teniendo en cuenta que estamos suponiendo que $u'(\hat{z} - z) < \|\hat{z} - z\|$). Atendiendo a las k primeras coordenadas en (3.7), podemos escribir $u = \lim_r \sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r w$, llegándose a la contradicción

$$1 = \|u\|_* \leq \limsup_r \sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r \|w\|_* = \limsup_r \sum_{w \in \text{bd}(B_*)} \lambda_w^r < 1.$$

Con el objetivo de probar la implicación contraria, tomemos \hat{z} y u verificando (i) y (ii), y sea $x \in \mathbb{R}^k$ satisfaciendo $\|x - z\| < \|\hat{z} - z\|$. Entonces $x \notin F$, puesto que

$$u'x = u'z + u'(x - z) \leq u'\hat{z} - \|\hat{z} - z\| + \|u\|_* \|x - z\| < u'\hat{z}.$$

■

Observación 3.2.3 Obsérvese que el vector u en el lema anterior no es único en general.

En el siguiente teorema apelamos a la función $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\varphi(\lambda) := \max_{\substack{\|u\|_* = 1 \\ u \in \mathbb{R}^n}} \left\| \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|, \quad (3.8)$$

donde las normas dadas en \mathbb{R}^n y en \mathbb{R}^{n+1} se denotan ambas por $\|\cdot\|$. Puesto que estamos suponiendo que se verifica (2.1), φ resulta ser creciente en \mathbb{R}_+ .

Teorema 3.2.4 Sean $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces, se tiene

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq \frac{\varphi(\|z\|) \left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)).$$

Demostración. Si $z \in \mathcal{F}(\sigma)$ o $d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)) = +\infty$, la desigualdad deseada es trivial. Supongamos entonces que $z \notin \mathcal{F}(\sigma)$ y que $d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)) < +\infty$, y sea \hat{z} una mejor aproximación (con respecto a la norma, $\|\cdot\|$, en \mathbb{R}^n) de z en $\mathcal{F}(\sigma)$. Aplicando el lema 3.2.2 concluimos la existencia de $u \in \text{bd}(B_*)$ tal que $(\hat{z} - z)'u = \|\hat{z} - z\|$ y $u'x \geq u'\hat{z}$ para todo $x \in \mathcal{F}(\sigma)$. Entonces, en virtud del Lema de Farkas, deberán existir dos sucesiones $\{\lambda^r\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\{\mu_r\} \subset \mathbb{R}_+$ tales que

$$\begin{pmatrix} u \\ u'\hat{z} \end{pmatrix} = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu_r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.9)$$

Multiplicando ambos miembros de (3.9) por $\begin{pmatrix} \widehat{z} \\ -1 \end{pmatrix}$, y teniendo en cuenta que $\widehat{z} \in \mathcal{F}(\sigma)$, deducimos que la sucesión $\{\mu_r\}$ debe converger a cero, y, por tanto, el término $\mu_r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ se puede eliminar en (3.9); esto es,

$$\begin{pmatrix} u \\ u'\widehat{z} \end{pmatrix} = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Ahora, el lema 3.2.1 proporciona

$$\limsup_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \leq \frac{\left\| \begin{pmatrix} u \\ [-u'\widehat{z}]_+ \end{pmatrix} \right\|}{d(\sigma, \Theta_i)} \leq \frac{\varphi(\|z\|)}{d(\sigma, \Theta_i)},$$

debido a que $u'\widehat{z} \geq u'z$ (recuérdese que $u'(\widehat{z} - z) = \|\widehat{z} - z\| \geq 0$) implica que $[-u'\widehat{z}]_+ \leq [-u'z]_+ \leq |u'z| \leq \|u\|_* \|z\| = \|z\|$, y entonces se aplica la observación 2.1.1.

Multiplicando ahora ambos miembros de (3.10) por $\begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix}$, se obtiene

$$\|\widehat{z} - z\| = u'(\widehat{z} - z) = \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.11)$$

Si $\sigma_1 := \{(a_t^1)' x \geq b_t^1, t \in T\} \in \mathcal{F}^{-1}(z)$ y $d(\sigma, \sigma_1) < +\infty$, (3.11) implica que

$$\begin{aligned} \|\widehat{z} - z\| &= \lim_r \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t^r \left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\leq d(\sigma, \sigma_1) \left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \limsup_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r \leq \frac{\varphi(\|z\|) \left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \sigma_1), \end{aligned}$$

puesto que $\begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$, para cada $t \in T$. Recordando que $\|\widehat{z} - z\| = d(z, \mathcal{F}(\sigma))$, y por ser $\sigma_1 \in \mathcal{F}^{-1}(z)$ arbitrario, obtenemos la desigualdad desea-

da

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq \frac{\varphi(\|z\|) \left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)).$$

■

Observación 3.2.5 Dada cualquier norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n , si consideramos la norma (3.1) en \mathbb{R}^{n+1} (inspirada en [44]), es fácil comprobar que $\varphi(\|z\|) = \max\{1, \|z\|\}$ y $\left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* = 1 + \|z\|$. En este caso, el teorema anterior prueba que

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq \frac{\max\{1, \|z\|\} (1 + \|z\|)}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)),$$

desigualdad que extiende (3.4) al caso semi-infinito.

El siguiente corolario establece que \mathcal{F}^{-1} es métricamente regular en cualquier $(x^0, \sigma_0) \in \text{gph}(\mathcal{F}^{-1})$, con $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$, proporcionando explícitamente los entornos U de x^0 y V de σ_0 , y el rango L que forman parte de la definición. Por φ_* representaremos a la función φ asociada con las normas duales (de las inicialmente consideradas en \mathbb{R}^n y en \mathbb{R}^{n+1}). Se puede comprobar fácilmente que, si la norma dada en \mathbb{R}^{n+1} verifica (2.1), su norma dual también lo hace.

Corolario 3.2.6 Sea $(\sigma_0, x^0) \in \text{gph}(\mathcal{F})$, con $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$, y sean $0 \leq \varepsilon < d(\sigma_0, \Theta_i)$ y $\rho > 0$. Entonces, para cualquier $\sigma \in \Theta$ tal que $d(\sigma, \sigma_0) \leq \varepsilon$ y cualquier $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z - x^0\| \leq \rho$, se tiene

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq \frac{\varphi(\|x^0\| + \rho) \left(\left\| \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* + \rho\varphi_*(0) \right)}{d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon} d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)).$$

Demostración. Por un lado, como φ es creciente, y $\|z - x^0\| \leq \rho$ implica que $\|z\| \leq \|x^0\| + \rho$, se tiene $\varphi(\|z\|) \leq \varphi(\|x^0\| + \rho)$. Además, en el caso no trivial

$z \neq x^0$ tenemos

$$\left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \leq \left\| \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* + \|z - x^0\| \left\| \begin{pmatrix} \frac{z-x^0}{\|z-x^0\|} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_* \leq \left\| \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* + \rho\varphi_*(0).$$

Por otro lado, $d(\sigma, \sigma_0) \leq \varepsilon < d(\sigma_0, \Theta_i)$ implica $d(\sigma, \Theta_i) \geq d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon > 0$. ■

Tomando $\varepsilon = 0$ en el corolario anterior, vemos que \mathcal{F}^{-1} satisface una cota de error local en cualquier $(x^0, \sigma_0) \in \text{gph}(\mathcal{F}^{-1})$, con $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$. Concretamente, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2.7 Sean $(\sigma_0, x^0) \in \text{gph}(\mathcal{F})$, con $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$, y $\rho > 0$. Entonces, para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z - x^0\| \leq \rho$, se tiene

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma_0)) \leq \frac{\varphi(\|x^0\| + \rho) \left(\left\| \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* + \rho\varphi_*(0) \right)}{d(\sigma_0, \Theta_i)} d(\sigma_0, \mathcal{F}^{-1}(z)).$$

El siguiente lema junto con el teorema 3.2.4 y sus corolarios, nos permite obtener desigualdades de tipo Hoffman ([28], véase también [35, Lema 2.7]).

Lema 3.2.8 Dados $\sigma \in \Theta$ y $z \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)) = \left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*^{-1} \sup_{t \in T} \{[b_t - a'_t z]_+\}. \quad (3.12)$$

(Aquí, $\|\cdot\|$ puede ser cualquier norma en \mathbb{R}^{n+1}).

Demostración. Empecemos observando que $\sigma_1 \in \mathcal{F}^{-1}(z)$ si y sólo si

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix}, t \in T \right\} \subset E := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq 0 \right\}.$$

Así pues, si $\sigma_1 \in \mathcal{F}^{-1}(z)$, entonces, para todo $t \in T$ tenemos

$$\left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} \right\| \geq d \left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, E \right) = \frac{[b_t - a'_t z]_+}{\left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*},$$

donde la última igualdad es consecuencia de la fórmula para la distancia de un punto a un semiespacio¹. Ahora, argumentos estándar dan lugar a la desigualdad “ \geq ” en (3.12). Por otra parte, si, para cada $t \in T$, $d\left(\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, E\right)$ se alcanza en $\begin{pmatrix} a_t^E \\ b_t^E \end{pmatrix}$, entonces el correspondiente sistema σ^E pertenece a $\mathcal{F}^{-1}(z)$ y, por tanto,

$$d(\sigma, \mathcal{F}^{-1}(z)) \leq d(\sigma, \sigma^E) = \sup_{t \in T} \left\{ \frac{[b_t - a'_t z]_+}{\left\| \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*} \right\}.$$

De esta forma obtenemos (3.12). ■

Obsérvese que la expresión $\sup_{t \in T} \{[b_t - a'_t z]_+\}$ se puede ver como una medida de la infactibilidad de z con respecto a σ . El siguiente corolario del teorema 3.2.4, junto con el lema 3.2.8, proporciona la desigualdad de tipo Hoffman anunciada anteriormente. Esta desigualdad está estrechamente relacionada con la noción de estabilidad en el sentido clásico de Robinson ([46], véase también [23, Teorema 3.1 (vii)] para más información en nuestro contexto semi-infinito).

Corolario 3.2.9 Sean $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces, se tiene

$$d(z, \mathcal{F}(\sigma)) \leq \frac{\varphi(\|z\|)}{d(\sigma, \Theta_i)} \sup_{t \in T} \{[b_t - a'_t z]_+\}.$$

3.3 Complejidad del algoritmo del elipsoide

La aplicación que desarrollamos en esta sección se ocupa de la complejidad del algoritmo del elipsoide destinado a encontrar un punto de un conjunto convexo, F , el cual también permite calcular soluciones ε -óptimas del problema de programación convexa $\text{Inf}\{f(x) \mid x \in F\}$, cuando se trabaja con conjuntos de nivel inferior apropiados. Como se señala en [19, p. 247-248], son ingredientes necesarios:

¹Dicha fórmula es bien conocida para la norma euclídea, y se generaliza fácilmente para una norma general.

- una bola $z + rcl(B)$ contenida en F ;
- una bola $Rcl(B)$ conteniendo a $z + rcl(B)$ (es suficiente considerar $R = \|z\| + r$);
- una cota superior de $\frac{R}{r}$.

Estos ingredientes dan lugar a una cota de la complejidad en el número de iteraciones del algoritmo del elipsoide, la cual es de orden $O(n^2 \ln(R/r))$ (véase de nuevo [19]). En [19, Lema 2(iii) y Teorema 19(iii)(c)] se proporciona, para un sistema $\delta = (A, b)$ en el formato (1.9), con C_Y regular (i.e., C_Y es un cono convexo cerrado, con interior no vacío y apuntado -no contiene rectas-), la siguiente cota superior:

$$\frac{R}{r} \leq 1 + \frac{2\|\delta\|}{\bar{\beta}^* \rho(\delta)}, \quad (3.13)$$

donde $\bar{\beta}^* \in]0, 1]$ es el denominado *coeficiente de linealidad* del cono dual C_Y^* (véase [19, Definición 2]) y $\rho(\delta)$ es la distancia al mal planteamiento.

De ahora en adelante, consideraremos el caso no trivial $\{a_t, t \in T\} \neq \{0_n\}$ (en otro caso, para un sistema consistente σ tendríamos $F = \mathbb{R}^n$). Nuestro primer paso consiste en caracterizar la existencia de puntos interiores en F (i.e., la posibilidad de tener $r > 0$). En el caso finito, la existencia de puntos interiores en F está garantizada por la condición “ $d(\sigma, \Theta_i) > 0$ ”. Es más, esta última condición es también necesaria para que $int(F)$ no sea vacío, supuesto que σ no contiene la desigualdad trivial $0 \geq 0$. Las mismas afirmaciones son ciertas en el caso más general de los sistemas continuos (véase la introducción de esta memoria), pero dejan de ser válidas cuando T es arbitrario. En el caso general (T arbitrario) la condición “ $d(\sigma, \Theta_i) > 0$ ” es equivalente a la existencia de puntos fuertes de Slater (véase el teorema 0.3.3). Para un sistema continuo (y, en particular, un sistema finito), σ , que no contenga la desigualdad trivial $0 \geq 0$, el conjunto de todos los puntos fuertes de Slater coincide con $int(F)$ (véase [21, Teorema 5.9 (iv)]). Sin embargo, este no es el caso en nuestro contexto semi-infinito general. Consideremos simplemente el sistema, en \mathbb{R} , $\sigma := \{r x_1 \geq -1, -r x_1 \geq -1, r \in \mathbb{N}\} \in int(\Theta_c)$,

i.e., $d(\sigma, \Theta_i) > 0$. El punto $\bar{x} = 0$ es un punto fuerte de Slater de σ , mientras que $F = \{0\}$ y, por tanto, $\text{int}(F) = \emptyset$.

El siguiente lema nos permite caracterizar la propiedad $\text{int}(F) \neq \emptyset$ cuando T es arbitrario. Específicamente, dado $z \in F$, proporciona una expresión para el radio de la mayor bola centrada en z y contenida en F .

Lema 3.3.1 Sean $\sigma \in \Theta_c$ y $z \in F$ ($:= \mathcal{F}(\sigma)$). Entonces

$$\sup \{r \in \mathbb{R} \mid z + r \text{cl}(B) \subset F\} = \inf \left\{ \frac{a'_t z - b_t}{\|a_t\|_*} \mid a_t \neq 0_n, t \in T \right\}. \quad (3.14)$$

Demostración. Dado $z \in F$, tenemos que $z + r \text{cl}(B) \subset F$ si y sólo si la distancia de z a todos los hiperplanos $E_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x = b_t\}$, $a_t \neq 0_n$, $t \in T$, es mayor o igual que r . Si $a_t = 0_n$, la consistencia de σ implica que $b_t \leq 0$ y, por tanto, la correspondiente desigualdad se satisface para todo punto de \mathbb{R}^n . Puesto que $d(z, E_t) = \frac{a'_t z - b_t}{\|a_t\|_*}$, para cada $t \in T$ con $a_t \neq 0_n$, obtenemos la desigualdad “ \leq ” de (3.14). Con el objetivo de conseguir la igualdad denotemos por r_z al valor de la expresión en el lado izquierdo de (3.14). Para cualquier $\varepsilon > 0$, debe existir $z^\varepsilon \in (z + (r_z + \varepsilon) \text{cl}(B)) \setminus F$; i.e., debemos tener $a'_{t_\varepsilon} z^\varepsilon < b_{t_\varepsilon}$, para cierto $t_\varepsilon \in T$. Obsérvese que $a_{t_\varepsilon} \neq 0_n$, puesto que $\sigma \in \Theta_c$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{pmatrix} a_{t_\varepsilon} \\ b_{t_\varepsilon} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} z^\varepsilon \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{t_\varepsilon} \\ b_{t_\varepsilon} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} z \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{t_\varepsilon} \\ b_{t_\varepsilon} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} z^\varepsilon - z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\geq a'_{t_\varepsilon} z - b_{t_\varepsilon} - \|a_{t_\varepsilon}\|_* \|z^\varepsilon - z\| \geq a'_{t_\varepsilon} z - b_{t_\varepsilon} - \|a_{t_\varepsilon}\|_* (r_z + \varepsilon), \end{aligned}$$

y, por tanto, $\frac{a'_{t_\varepsilon} z - b_{t_\varepsilon}}{\|a_{t_\varepsilon}\|_*} < r_z + \varepsilon$. De esta forma hemos visto que, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\inf \left\{ \frac{a'_t z - b_t}{\|a_t\|_*} \mid a_t \neq 0_n, t \in T \right\} < r_z + \varepsilon,$$

lo cual finaliza la prueba. ■

El siguiente corolario caracteriza la propiedad $\text{int}(F) \neq \emptyset$ como consecuencia inmediata del lema anterior, en términos del *sistema normalizado* asociado a $\sigma \in \Theta_c$, definido como sigue:

$$\tilde{\sigma} := \left\{ \left(\frac{a_t}{\|a_t\|_*} \right)' x \geq \frac{b_t}{\|a_t\|_*}, t \in \tilde{T} \right\}, \text{ donde } \tilde{T} := \{t \in T \mid a_t \neq 0_n\}.$$

De ahora en adelante consideraremos también el espacio paramétrico $\tilde{\Theta}$ de todos los sistemas de desigualdades lineales con conjunto de índices \tilde{T} , representando por \tilde{d} la distancia extendida asociada. Aquí, $\tilde{\Theta}_c$ y $\tilde{\Theta}_i$ representarán los correspondientes subconjuntos de sistemas consistentes e inconsistentes, respectivamente. Obsérvese que $F = \tilde{F}$ para cualquier sistema $\sigma \in \Theta_c$.

Corolario 3.3.2 *Sea $\sigma \in \Theta_c$. Entonces $\text{int}(F) \neq \emptyset$ si y sólo si $\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i) > 0$.*

Demostración. Obsérvese que, del teorema 1.4.3(i),

$$\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i) = \sup_{x \in F} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*^{-1} \inf \left\{ \frac{a'_t x - b_t}{\|a_t\|_*} \mid t \in \tilde{T} \right\} \right\} \quad (3.15)$$

(la consistencia de $\tilde{\sigma}$ nos permite escribir “ $\sup_{x \in F}$ ” en lugar de “ $\sup_{x \in \mathbb{R}^n}$ ” en la expresión de su valor de consistencia, $\tilde{\kappa} = \tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i)$). De este modo, la equivalencia que deseamos obtener se consigue como consecuencia inmediata del lema anterior.

■

La siguiente proposición proporciona los tres ingredientes a los que nos hemos referido anteriormente, con $R = \|z\| + r$. En ella α representa cualquier constante positiva tal que $\|x\| \leq \alpha \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_*$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (nótese que la expresión $x \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_*$ proporciona una norma en \mathbb{R}^n , y recuérdese que todas las norma en \mathbb{R}^n son equivalentes).

Proposición 3.3.3 *Sea $\sigma \in \Theta_c$ y supongamos que $\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i) > 0$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen $z \in F$ y $r > 0$ verificando:*

- (i) $z + r \text{cl}(B) \subset F$;
- (ii) $\frac{\|z\| + r}{r} \leq 1 + \frac{\alpha}{\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i)} + \varepsilon$.

Demostración. Para cada $x \in F$, representaremos por r_x al valor dado en (3.14). Así, (i) se satisface para cualquier $x \in \text{int}(F)$ ($\neq \emptyset$) tomando $r = r_x$. Además, bajo la hipótesis $\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i) > 0$, podemos reemplazar en (3.15), “ $x \in F$ ” por “ $x \in \text{int}(F)$ ” (para garantizar que $r_x > 0$) y entonces poder escribir

$$\frac{\alpha}{\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i)} = \inf_{x \in \text{int}(F)} \frac{\alpha \left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}{r_x} \geq \inf_{x \in \text{int}(F)} \frac{\|x\|}{r_x},$$

donde, en la última desigualdad, se ha utilizado la elección de α y el hecho de que la norma dual en \mathbb{R}^{n+1} satisface (2.1).

Así pues, dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in \text{int}(F)$ tal que $\frac{\alpha}{\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i)} + \varepsilon \geq \frac{\|z\|}{r_z}$. Con esto, el punto z y el radio r_z verifican las condiciones (i) y (ii). ■

Corolario 3.3.4 Sea $\sigma \in \Theta_c$ con $d(\sigma, \Theta_i) > 0$ y supongamos que $\sup_{t \in T} \|a_t\|_* < +\infty$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen $z \in F$ y $r > 0$ verificando:

- (i) $z + r \text{cl}(B) \subset F$;
- (ii) $\frac{\|z\| + r}{r} \leq 1 + \alpha \frac{\sup_{t \in T} \|a_t\|_*}{d(\sigma, \Theta_i)} + \varepsilon$.

Demostración. Nótese que, si denotamos $k := \sup_{t \in T} \|a_t\|_*$, de (3.15) se tiene

$$\tilde{d}(\tilde{\sigma}, \tilde{\Theta}_i) \geq \sup_{x \in F} \left\| \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*^{-1} \inf \left\{ \frac{a'_t x - b_t}{k} \mid t \in \tilde{T} \right\} = \frac{d(\sigma, \Theta_i)}{k},$$

y se aplica entonces la proposición anterior para concluir la prueba. ■

Observación 3.3.5 Dada cualquier norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n , si consideramos la norma (3.1) en \mathbb{R}^{n+1} (inspirada en [44], y también en [19]), se puede elegir $\alpha = 1$ (puesto que en este caso $\left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_* = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$) en el corolario anterior. En particular, cuando T es finito, se obtiene un refinamiento evidente de (3.13) en nuestro contexto semi-infinito.

3.4 Acotación del conjunto factible y del conjunto óptimo

El siguiente lema permitirá establecer, en el teorema 3.4.3, una cota del conjunto $\{\|x\| \mid x \in F\}$ en términos de los coeficientes del sistema $\sigma \in \Theta_c$.

Lema 3.4.1 *Sea $\sigma \in \Theta_c$. Se tienen las siguientes relaciones:*

- (i) $\inf \{\rho \geq 0 \mid F \subset \rho \text{cl}(B)\} = \sup_{\|u\|=1} \sup \{\lambda \geq 0 \mid \lambda u \in F\}$;
- (ii) *Si $u \in \mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$, entonces*

$$\sup \{\lambda \geq 0 \mid \lambda u \in F\} \leq \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\},$$

y, en consecuencia,

$$\sup_{\|u\|=1} \sup \{\lambda \geq 0 \mid \lambda u \in F\} \leq \sup_{\|u\|=1} \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\}. \quad (3.16)$$

Demostración. Para abreviar consideramos la siguiente notación:

$$R_1 := \inf \{\rho \geq 0 \mid F \subset \rho \text{cl}(B)\} \text{ y } R_2 := \sup_{\|u\|=1} \sup \{\lambda \geq 0 \mid \lambda u \in F\}.$$

Veamos en primer lugar la condición (i). Con el fin de obtener la desigualdad $R_1 \geq R_2$ situémonos en el caso no trivial $R_1 < +\infty$. Sea $\bar{\rho} \geq 0$ tal que $F \subset \bar{\rho} \text{cl}(B)$, y sea $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\bar{u}\| = 1$. Entonces, o bien $\{\lambda \geq 0 \mid \lambda \bar{u} \in F\} = \emptyset$, o bien, existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que $\lambda_0 \bar{u} \in F$, en cuyo caso se tiene que $\|\lambda_0 \bar{u}\| \leq \bar{\rho}$ y por tanto $\lambda_0 \leq \bar{\rho}$. Con un razonamiento estándar obtenemos entonces $R_2 \leq R_1$.

Veamos ahora que $R_1 \leq R_2$. En el caso en el que $R_1 = +\infty$, tenemos que F es no acotado, y el teorema 0.3.4 asegura la existencia de $v \in O^+(F)$ con $v \neq 0_n$. Sea $x_0 \in F$, y sean $u^r := \frac{x_0 + rv}{\|x_0 + rv\|}$ y $\lambda_r := \|x_0 + rv\|$ para cada $r \in \mathbb{N}$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r > \frac{\|x_0\|}{\|v\|}$ para que sea $\|x_0 + rv\| > 0$). Como $v \in O^+(F)$ se tiene que $\lambda_r u^r = x_0 + rv \in F$, con $\|u^r\| = 1$, para cada $r \in \mathbb{N}$,

por tanto, $R_2 \geq \lambda_r$ y como la sucesión $\{\lambda_r\}$ converge a $+\infty$ entonces $R_2 = +\infty$. Supongamos ahora que $R_1 < +\infty$ y que, por reducción al absurdo, $R_2 < R_1$. Como $\frac{R_1 + R_2}{2} < R_1$ entonces $F \not\subset \frac{R_1 + R_2}{2}cl(B)$ y, por tanto, existe $\bar{y} \in F$ con $\|\bar{y}\| > \frac{R_1 + R_2}{2}$. Sean pues $\bar{u} := \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ y $\bar{\lambda} := \|\bar{y}\|$; entonces $\bar{\lambda}\bar{u} = \bar{y} \in F$, con $\|\bar{u}\| = 1$ y, por tanto, $R_2 \geq \bar{\lambda} = \|\bar{y}\| > \frac{R_1 + R_2}{2} > R_2$, lo que representa una contradicción.

Con el objetivo de probar (ii), definimos, para cada $u \in \mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$,

$$\Phi(u) := \sup \{ \lambda \geq 0 \mid \lambda u \in F \} \in [0, +\infty].$$

Sea $u \in \mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$, tal que $\Phi(u) = +\infty$. Entonces $R_2 = +\infty$ y, por (i), se tiene que $R_1 = +\infty$, en cuyo caso, F no está acotado. El teorema 0.3.4 asegura entonces que existe $u \in O^+(F) = M^o$ con $u \neq 0_n$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|u\| = 1$) y, por tanto, $\{t \in T \mid a'_t u < 0\} = \emptyset$, con lo que $\inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} = +\infty$ y, por tanto, se tiene la desigualdad que buscamos. Sean ahora $u \in \mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$ y $\Phi(u) < +\infty$, y $\lambda \geq 0$ tales que $\lambda u \in F$. Se tiene que $\lambda a'_t u \geq b_t$ para todo $t \in T$. Si $t \in T_u^- := \{t \in T \mid a'_t u < 0\}$, entonces $\lambda \leq \frac{b_t}{a'_t u}$, y un argumento estándar nos da

$$\Phi(u) \leq \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid t \in T_u^- \right\} = \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\}.$$

■

El siguiente ejemplo muestra que la desigualdad (3.16), en el lema anterior, puede ser estricta. En este ejemplo denotaremos

$$R_3 := \sup_{\|u\|=1} \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\}$$

y consideramos \mathbb{R}^2 dotado de la norma euclídea.

Ejemplo 3.4.2 Considérese el siguiente sistema de desigualdades lineales en \mathbb{R}^2 : $\sigma = \{x_1 \geq 1, -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq -1, x_2 \geq 0\}$. Se tiene que $F = \{(1, 0)'\}$ y, por tanto, con

la notación del lema anterior, $R_1 = R_2 = 1$. Sin embargo, para $u = (1, 0)'$ se tiene que $\inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} = \frac{-1}{(-1, -1/2) (0, 1)'} = 2$ por lo que $R_3 \geq 2 > 1 = R_2$.

Teorema 3.4.3 *Sea $\sigma \in \Theta_c$ con F acotado. Entonces*

$$\inf \{ \rho \geq 0 \mid F \subset \rho \text{cl}(B) \} \leq \frac{\sup \{ -b_t, t \in T \}}{d_*(0_n, \text{bd}(A))},$$

donde $d_*(x, y) := \|x - y\|_*$, siendo $\|\cdot\|_*$ la norma dual de la considerada inicialmente en \mathbb{R}^n , y $A = \text{conv} \{a_t, t \in T\}$.

Demostración. En primer lugar, por ser $\sigma \in \Theta_c$ y F acotado, tenemos en virtud del teorema 0.3.4 que $0_n \in \text{int}(A)$ por lo que $d_*(0_n, \text{bd}(A)) > 0$. Por otra parte, y apelando al teorema 0.2.4, deben existir un subconjunto finito \tilde{T} de T y un escalar positivo λ_t para cada $t \in \tilde{T}$, tales que $0_n = \sum_{t \in \tilde{T}} \lambda_t a_t$. Si fuera $b_t > 0$ para todo $t \in T$, tendríamos entonces que $\varepsilon := \sum_{t \in \tilde{T}} \lambda_t b_t > 0$, luego

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t \in \tilde{T}} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in N,$$

lo que implicaría que $\sigma \in \Theta_i$ (teorema 0.3.1) en contradicción con las hipótesis. Así pues, debe existir algún $t_0 \in T$ para el cual $b_{t_0} \leq 0$.

Sea $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$, y denotemos $\beta := \inf \{ b_t \mid b_t \leq 0, t \in T \}$. Evidentemente, $\beta \leq b_t$ para todo $t \in T$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} &\leq \inf \left\{ \frac{\beta}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} = \\ -\beta \inf \left\{ \frac{1}{-a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} &= |\beta| \frac{1}{\sup \{ |a'_t u| \mid a'_t u < 0, t \in T \}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Veamos que $d_*(0_n, bd(A)) \leq \sup \{|a'_t u| \mid a'_t u < 0, t \in T\}$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $d_*(0_n, bd(A)) > \eta_u$, donde

$$\eta_u := \sup \{|a'_t u| \mid a'_t u < 0, t \in T\},$$

y sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\|_* = 1$ y $u'v = \|u\| = 1$. Para cada $t \in T$, definimos

$$\tilde{a}_t := \begin{cases} a_t, & \text{si } a'_t u \geq 0, \\ a_t + |a'_t u| v, & \text{si } a'_t u < 0. \end{cases}$$

Se tiene que $\tilde{a}'_t u \geq 0$ para todo $t \in T$, y, por tanto, $0_n \notin \text{int}(\tilde{A})$, siendo $\tilde{A} := \text{conv} \{\tilde{a}_t, t \in T\}$. Ahora bien, $\|a_t - \tilde{a}_t\|_* \leq \eta_u < d_*(0_n, bd(A))$ para todo $t \in T$, luego, en virtud del lema 1.3.1, $(d_*(0_n, bd(A)) - \eta_u) cl(B) \subset cl(\tilde{A})$, i.e., $0_n \in \text{int}(cl(\tilde{A})) = \text{int}(\tilde{A})$ (teorema 0.2.3) lo cual es una contradicción. Por tanto, $d_*(0_n, bd(A)) \leq \sup \{|a'_t u| \mid a'_t u < 0, t \in T\}$ y de (3.17) se deduce entonces que

$$\inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} \leq \frac{|\beta|}{d_*(0_n, bd(A))} = \frac{\sup \{-b_t, t \in T\}}{d_*(0_n, bd(A))},$$

luego como $u \in \mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$, ha sido arbitrariamente elegido, se tiene que

$$\sup_{\|u\|=1} \inf \left\{ \frac{b_t}{a'_t u} \mid a'_t u < 0, t \in T \right\} \leq \frac{\sup \{-b_t, t \in T\}}{d_*(0_n, bd(A))},$$

de donde se obtiene la desigualdad deseada aplicando el lema 3.4.1. ■

Observación 3.4.4 Del teorema anterior se desprende que, para un sistema $\sigma \in \Theta_c$ con F acotado (recuérdese que en tal caso los teoremas 0.3.4 y 0.2.4 aseguran que $0_n \in \text{int}(A)$ y que existe algún $t_0 \in T$ tal que $b_{t_0} \leq 0$), y con $\sup \{-b_t, t \in T\} < +\infty$, se tiene $F \subset \rho cl(B)$, siendo

$$\rho := \frac{\sup \{-b_t, t \in T\}}{d_*(0_n, bd(A))} \geq 0.$$

Ahora bien, en el caso en el que $\sup \{-b_t, t \in T\} = +\infty$, se puede aplicar el

teorema anterior a cualquier subsistema finito de σ , esto es, a un sistema $\tilde{\sigma} = \{a'_t x \geq b_t, t \in \tilde{T}\}$, con $\tilde{T} \subset T$ y \tilde{T} finito, tal que \tilde{F} esté acotado (i.e., $0_n \in \text{int}(\tilde{A})$) en virtud del teorema 0.3.4). Obsérvese que la existencia de tal sistema está garantizada por el teorema 0.2.4. Así pues, $F \subset \tilde{F} \subset \tilde{\text{pcl}}(B)$, donde

$$\tilde{\rho} := \frac{\sup \{-b_t, t \in \tilde{T}\}}{d_*(0_n, \text{bd}(\tilde{A}))}.$$

Corolario 3.4.5 *Sea $\pi \in \Pi_s$ con F^{op} acotado, y sea v el valor óptimo de π . Si $\sup \{-b_t, t \in T\} < +\infty$, entonces $F^{op} \subset \hat{\text{pcl}}(B)$ donde*

$$\hat{\rho} := \frac{\sup \{-b_t, t \in T; v\}}{d_*(0_n, \text{bd}(Z^-))}.$$

Demostración. Consideremos el sistema ampliado

$$\hat{\sigma} = \{a'_t x \geq b_t, t \in T; -c'x \geq -v\},$$

cuyo conjunto de índices es $\hat{T} := T \cup \{s\}$, siendo $s \notin T$ el índice asociado a la restricción “ $-c'x \geq -v$ ”. Los elementos asociados a $\hat{\sigma}$ se distinguirán con el acento circunflejo, $\hat{\cdot}$. Obsérvese que, por ser $\pi \in \Pi_s$, el sistema $\hat{\sigma}$ es consistente y, además, su conjunto factible es precisamente el conjunto óptimo de π , por lo que $\hat{F} = F^{op} \neq \emptyset$ está acotado. Además, por el hecho de ser $F^{op} \neq \emptyset$ acotado, el teorema 0.4.1 asegura que $c \in \text{int}(M)$, i.e., $0_n \in \text{int}(Z^-) = \text{int}(\hat{A})$ (véase la observación 2.2.3), y consecuentemente, mediante un razonamiento análogo al realizado en el teorema anterior, se tiene que $\sup \{-b_t, t \in T; v\} \geq 0$. Luego en virtud del teorema anterior tenemos que $F^{op} = \hat{F} \subset \hat{\text{pcl}}(B)$ donde

$$\hat{\rho} := \frac{\sup \{-b_t, t \in T; v\}}{d_*(0_n, \text{bd}(\hat{A}))} = \frac{\sup \{-b_t, t \in T; v\}}{d_*(0_n, \text{bd}(Z^-))}.$$

■

Observación 3.4.6 En el caso en el que $\sup \{-b_t, t \in T; v\} = +\infty$, elíjase un subproblema finito adecuado $\tilde{\pi} = (c, \tilde{\sigma})$, con $\tilde{\sigma} := \{a'_t x \geq b_t, t \in \tilde{T}\}$, análogamente a la observación 3.4.4 para obtener un cierto $\tilde{\rho} \geq 0$ tal que $F^{op} \subset \tilde{F} \subset \tilde{\rho} cl(B)$, donde $\tilde{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x \geq b_t, t \in \tilde{T}; -c'x \geq -v\}$.

En el resto de esta sección, así como en la siguiente, asumiremos, como hicimos en el Capítulo 2, que la norma $\|\cdot\|$ considerada en \mathbb{R}^{n+1} verifica (2.1), es decir, $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right\|$ para todo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, y en \mathbb{R}^n se considerará, por su parte, la norma (que denotaremos igualmente por $\|\cdot\|$) dada por (2.2), es decir, $\|a\| := \left\| \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$. Utilizaremos asimismo la función definida en (3.8) así como su “dual”, a saber,

$$\varphi(\lambda) := \max_{\substack{\|u\|_* = 1 \\ u \in \mathbb{R}^n}} \left\| \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|, \text{ y } \varphi_*(\lambda) := \max_{\substack{\|u\| = 1 \\ u \in \mathbb{R}^n}} \left\| \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|_*, \text{ con } \lambda \geq 0.$$

Obsérvese que, en las condiciones actuales ((2.1) y (2.2)), dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, se tiene que

$$\|x\|_* = \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_* = \|x\| \left\| \begin{pmatrix} x/\|x\| \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_* \leq \varphi_*(0) \|x\|$$

y, análogamente, $\|x\| \leq \varphi(0) \|x\|_*$.

El siguiente lema es un corolario del teorema 3.2.4 y será de utilidad en resultados posteriores.

Lema 3.4.7 Sean $\sigma_0 \in \text{int}(\Theta_c)$ y $z^0 \in F_0$, con $\|z^0\| \leq \alpha$ para cierto $\alpha \geq 0$. Si $0 \leq \varepsilon < d(\sigma_0, \Theta_i)$, entonces, para todo $\sigma \in \Theta$ con $d(\sigma, \sigma_0) \leq \varepsilon$ se tiene

$$d(z^0, F) \leq \frac{\varphi(\alpha) \left(\varphi_*(0) \alpha + \left\| \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \right)}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \sigma_0). \quad (3.18)$$

Demostración. Como $d(\sigma, \sigma_0) \leq \varepsilon < d(\sigma_0, \Theta_i)$, entonces $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$ y, por tanto, en virtud del teorema 3.2.4, se tiene que

$$d(z^0, F) \leq \frac{\varphi(\|z^0\|) \left\| \begin{pmatrix} z^0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \sigma_0).$$

Por una parte, como $\|z^0\| \leq \alpha$, tenemos que $\varphi(\|z^0\|) \leq \varphi(\alpha)$ (puesto que la función φ es creciente en \mathbb{R}_+), y también

$$\left\| \begin{pmatrix} z^0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \leq \left\| \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_* + \left\| \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \leq \varphi_*(0) \alpha + \left\| \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*,$$

lo cual permite concluir la prueba. ■

De ahora en adelante denotaremos por ψ la función definida en \mathbb{R}_+ mediante

$$\psi(\alpha) := \varphi(\alpha) \left(\varphi_*(0) \alpha + \left\| \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_* \right). \quad (3.19)$$

Obsérvese que la desigualdad (3.18) en el lema anterior quedaría como

$$d(z^0, F) \leq \frac{\psi(\alpha)}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \sigma_0).$$

En la siguiente proposición acotamos uniformemente los conjuntos óptimos de todos los problemas que están en un entorno de cierto problema dado en el interior del conjunto de los problemas resolubles.

Proposición 3.4.8 *Sea $\pi_0 = (c^0, \sigma_0) \in \text{int}(\Pi_s)$, con valor óptimo v_0 , tal que $\sup\{-b_t^0, t \in T\} < +\infty$, y sea $0 \leq \varepsilon < \delta(\pi_0, \text{bd}(\Pi_s))$. Entonces, dado $\pi = (c, \sigma) \in \Pi$ con $\delta(\pi, \pi_0) \leq \varepsilon$, se tiene que $F^{\text{op}} \subset L(v_0 + \varepsilon\gamma_0) \subset \mu_0 \text{cl}(B)$, siendo*

$$\begin{aligned} \beta_0 & : = \frac{\psi(\widehat{\rho}_0)}{d(\pi_0, \text{bd}(\Pi_s)) - \varepsilon}, \\ \gamma_0 & : = \varphi_*(0) (\widehat{\rho}_0 + \beta_0 \varepsilon) + \|c^0\|_* \beta_0, \\ \mu_0 & : = \varphi(0) \frac{\sup\{-b_t^0, t \in T; v_0\} + \varepsilon \max\{1, \gamma_0\}}{d(0_n, \text{bd}(Z_0^-)) - \varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\widehat{\rho}_0$ es la particularización de $\widehat{\rho}$, introducido en el corolario 3.4.5, al problema π_0 .

Obsérvese que $\widehat{\rho}_0$, β_0 , γ_0 y μ_0 únicamente dependen del problema nominal π_0 y del valor ε , fijado en el intervalo $[0, \delta(\pi_0, bd(\Pi_s))]$.

Demostración. Sea $\pi \in \Pi$ con $\delta(\pi, \pi_0) \leq \varepsilon$, y sea $z^0 \in F_0^{op}$. Como $\pi_0 \in int(\Pi_s)$, el teorema 0.4.1 asegura que $F_0^{op} \neq \emptyset$ está acotado y, por tanto, el corolario 3.4.5 permite afirmar que $F_0^{op} \subset \widehat{\rho}_0 cl(B)$, con lo cual $\|z^0\| \leq \widehat{\rho}_0$. Además, $z^0 \in F_0^{op} \subset F_0$, y como $\sigma_0 \in int(\Theta_c)$, obtenemos del lema anterior que

$$d(z^0, F) \leq \frac{\psi(\widehat{\rho}_0)}{d(\sigma, \Theta_i)} d(\sigma, \sigma_0).$$

Ahora bien, como $d(\sigma, \sigma_0) \leq \delta(\pi, \pi_0) \leq \varepsilon < d(\sigma_0, \Theta_i)$, del lema 1.3.1 se deduce $d(\sigma, \Theta_i) \geq d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon > 0$ y, por tanto,

$$d(z^0, F) \leq \frac{\psi(\widehat{\rho}_0)}{d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon} d(\sigma, \sigma_0) \leq \beta_0 \varepsilon.$$

Si $z \in F$ con $\|z - z^0\| = d(z^0, F) \leq \beta_0 \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} v &\leq c'z = (c - c^0)'z + (c^0)'(z - z^0) + (c^0)'z^0 \\ &\leq \|c - c^0\| \|z\|_* + \|c^0\|_* \|z - z^0\| + v_0 \\ &\leq \varepsilon \varphi_*(0) (\|z^0\| + \|z - z^0\|) + \|c^0\|_* \|z - z^0\| + v_0 \\ &\leq \varepsilon \varphi_*(0) (\widehat{\rho}_0 + \beta_0 \varepsilon) + \|c^0\|_* \beta_0 \varepsilon + v_0 = \varepsilon \gamma_0 + v_0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

con lo que $F^{op} \subset L(v_0 + \varepsilon \gamma_0)$.

Por otra parte, como $\delta(\pi, \pi_0) \leq \varepsilon < \delta(\pi_0, bd(\Pi_s))$, entonces $\pi \in int(\Pi_s)$ y el teorema 0.4.1 asegura que $L(v_0 + \varepsilon \gamma_0) \neq \emptyset$ está acotado. Si consideramos el sistema ampliado

$$\widehat{\sigma} = \{a'_t x \geq b_t, t \in T; -cx \geq -(v_0 + \varepsilon \gamma_0)\},$$

su conjunto factible $\widehat{F} = L(v_0 + \varepsilon\gamma_0)$ es no vacío y acotado y, entonces, el teorema 3.4.3 aplicado a dicho sistema nos da que $L(v_0 + \varepsilon\gamma_0) \subset \widehat{\rho}_1 cl(B)$, con

$$\widehat{\rho}_1 = \frac{\sup \{-b_t, t \in T; v_0 + \varepsilon\gamma_0\}}{d_*(0_n, bd(Z^-))} \leq \frac{\sup \{-b_t^0 + \varepsilon, t \in T; v_0 + \varepsilon\gamma_0\}}{d_*(0_n, bd(Z^-))}. \quad (3.22)$$

Además, puesto que $\delta(\pi, \pi_0) \leq \varepsilon < \delta(\pi_0, bd(\Pi_s)) \leq d(0_n, bd(Z_0^-))$, del lema 1.3.1 se deduce que $d(0_n, bd(Z^-)) \geq d(0_n, bd(Z_0^-)) - \varepsilon > 0$, y por tanto, $d_*(0_n, bd(Z^-)) \geq \frac{1}{\varphi(0)} (d(0_n, bd(Z_0^-)) - \varepsilon)$, con lo que

$$\frac{\sup \{-b_t^0 + \varepsilon, t \in T; v_0 + \varepsilon\gamma_0\}}{d_*(0_n, bd(Z^-))} \leq \varphi(0) \frac{\sup \{-b_t^0, t \in T; v_0\} + \varepsilon \max\{1, \gamma_0\}}{d(0_n, bd(Z_0^-)) - \varepsilon} = \mu_0,$$

lo cual, junto con (3.22) da $\widehat{\rho}_1 \leq \mu_0$ y, consecuentemente, $L(v_0 + \varepsilon\gamma_0) \subset \widehat{\rho}_1 cl(B) \subset \mu_0 cl(B)$. Así, $F^{op} \subset L(v_0 + \varepsilon\gamma_0) \subset \mu_0 cl(B)$, como queríamos demostrar. ■

Observación 3.4.9 De nuevo, en el caso en el que $\sup \{-b_t^0, t \in T\}$ no esté acotado, se trabajaría con un subproblema finito adecuado como se indica en la observación 3.4.6.

3.5 Lipschitzianidad del valor óptimo

Es ya sabido que la función *valor óptimo* $\vartheta : \Pi \rightarrow [-\infty, +\infty]$ que a cada problema $\pi \in \Pi$ le hace corresponder su valor óptimo $\vartheta(\pi) := v$ ($v = +\infty$ cuando $\pi \in \Pi_i$), satisface una *condición uniforme de Lipschitz* en un entorno de un problema $\pi_0 \in int(\Pi_s)$ (véase [7, Teorema 4.2]). El siguiente teorema da una prueba alternativa de este resultado y proporciona además una expresión explícita para una constante uniforme de Lipschitz en cualquier ε -entorno de π_0 , con $0 \leq 2\varepsilon < \delta(\pi_0, bd(\Pi_s))$.

Teorema 3.5.1 *Sea $\pi_0 = (c^0, \sigma_0) \in int(\Pi_s)$, con $\sup \{-b_t^0, t \in T\} < +\infty$, y sea $0 \leq 2\varepsilon < \delta(\pi_0, bd(\Pi_s))$. Si $\pi_1 = (c^1, \sigma_1)$ y $\pi_2 = (c^2, \sigma_2) \in \Pi$ son problemas en Π*

que satisfacen $\delta(\pi_i, \pi_0) \leq \varepsilon$, para $i = 1, 2$, entonces

$$|v_1 - v_2| \leq L_0 \delta(\pi_1, \pi_2),$$

donde

$$L_0 := \varphi_*(0) \left((\varepsilon + \|c^0\|) \frac{\psi(\mu_0)}{d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon} + \mu_0 \right),$$

siendo μ_0 tal que $F_i^{op} \subset \mu_0 cl(B)$, $i = 1, 2$ (véase (3.20) en el teorema anterior).

Demostración. Sea $z^1 \in F_1^{op}$, y tomemos $z^2 \in F_2$ tal que $\|z^2 - z^1\| = d(z^1, F_2)$.

Por una parte tenemos que $\sigma_1 \in int(\Theta_c)$, $z^1 \in F_1^{op} \subset F_1$, $\|z^1\| \leq \mu_0$ (véase (3.20)), y $d(\sigma_1, \sigma_2) \leq \delta(\pi_1, \pi_2) \leq 2\varepsilon$; luego en virtud del lema 3.4.7 tenemos que

$$d(z^1, F_2) \leq \frac{\psi(\mu_0)}{d(\sigma_2, \Theta_i)} d(\sigma_1, \sigma_2).$$

Ahora bien, dado que $d(\sigma_2, \sigma_0) \leq \delta(\pi_2, \pi_0) \leq \varepsilon < d(\sigma_0, \Theta_i)$, del lema 1.3.1 se deduce que $d(\sigma_2, \Theta_i) \geq d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon > 0$, y por tanto

$$d(z^1, F_2) \leq \frac{\psi(\mu_0)}{d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon} d(\sigma_1, \sigma_2) \leq \frac{\psi(\mu_0)}{d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon} d(\pi_1, \pi_2), \quad (3.23)$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &\leq (c^2)' z^2 - (c^1)' z^1 = (c^2)' (z^2 - z^1) + (c^2 - c^1)' z^1 \\ &\leq \|c^2\|_* d(z^1, F_2) + \|c^2 - c^1\| \|z^1\|_* \\ &\leq \varphi_*(0) \|c^2\| d(z^1, F_2) + \delta(\pi_1, \pi_2) \varphi_*(0) \|z^1\| \\ &\leq \varphi_*(0) (\|c^2 - c^0\| + \|c^0\|) d(z^1, F_2) + \delta(\pi_1, \pi_2) \mu_0 \\ &\leq \varphi_*(0) (\varepsilon + \|c^0\|) d(z^1, F_2) + \delta(\pi_1, \pi_2) \mu_0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Luego de (3.23) y (3.24) obtenemos

$$v_2 - v_1 \leq \varphi_*(0) \left((\varepsilon + \|c^0\|) \frac{\psi(\mu_0)}{d(\sigma_0, \Theta_i) - \varepsilon} + \mu_0 \right) \delta(\pi_1, \pi_2)$$

$$= L_0 \delta(\pi_1, \pi_2).$$

Por simetría se deduce que $v_1 - v_2 \leq L_0 \delta(\pi_1, \pi_2)$ y, por tanto, $|v_1 - v_2| \leq L_0 \delta(\pi_1, \pi_2)$, como queríamos demostrar. ■

Observación 3.5.2 En el caso en el que $\sup \{-b_t^0, t \in T\}$ no esté acotado, trabájese con un subproblema finito adecuado (véanse las observaciones referentes a esta cuestión en la sección anterior).

3.6 Análisis primal-dual de la estabilidad

Abordamos a continuación la estabilidad de un problema de PLSI mediante un enfoque que incorpora a nuestro estudio la consideración del problema dual (en el sentido de Haar) asociado al problema nominal. Los siguientes conceptos y resultados básicos de la teoría de la dualidad (véase, por ejemplo, [21, Capítulos 2 y 8], para detalles acerca de la misma), hacen esta sección autocontenida.

Dado el problema primal

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } c'x \\ & \text{s.a } a_t'x \geq b_t, \quad t \in T, \end{aligned} \tag{3.25}$$

si $\pi \in \Pi_c$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ satisface que $\sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c$ (i.e., $c \in M$), se tiene que, para cada $x \in F$,

$$c'x = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t'x \geq \sum_{t \in T} \lambda_t b_t, \tag{3.26}$$

así, la suma del miembro derecho en (3.26) proporciona una cota inferior para el valor óptimo de π , v . Esto sugiere la siguiente definición de problema dual asociado a π , que se basa en maximizar el funcional lineal, en $\mathbb{R}^{(T)}$, definido por $\Psi(\lambda) := \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$ en el conjunto

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\}.$$

Así pues, se define el *problema dual* (en el sentido de Haar) asociado al problema π como

$$\begin{aligned} \pi^d : \quad & \sup \Psi(\lambda) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Denotaremos por Π_c^d y por Π_i^d a los subconjuntos de Π formados por aquellos problemas, π , cuyo problema dual, π^d , es consistente (i.e., con $c \in M$) e inconsistente, respectivamente. Para abreviar, a los problemas en Π_c^d los llamaremos *dual-consistentes* y, de la misma forma, a los problemas en Π_i^d los llamaremos *dual-inconsistentes*. Asimismo, en relación con π^d , denotaremos por F^d a su conjunto factible, por $(F^{op})^d$ a su conjunto óptimo y por v^d a su valor óptimo ($v^d = -\infty$ cuando π^d es inconsistente i.e., cuando $F^d = \emptyset$).

Para un problema $\pi \in \Pi_c$, su valor óptimo y el valor óptimo de su problema dual se pueden expresar de la siguiente forma (véase, por ejemplo, [21, Teorema 8.1(ii)])

$$v = \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} c \\ w \end{pmatrix} \in cl(N) \right\}, \quad (3.28)$$

$$v^d = \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} c \\ w \end{pmatrix} \in N \right\}. \quad (3.29)$$

Con estas expresiones, es evidente la conocida *propiedad de dualidad débil*, $v^d \leq v$. Al valor $\mathcal{S}(\pi) = v - v^d \geq 0$ se le llama *salto de dualidad* para π . En el contexto de la Programación Lineal ordinaria, el cono N es cerrado (i.e., $cl(N) = N$) y, por tanto, para $\pi \in \Pi_c$ $\mathcal{S}(\pi) = 0$, esto es, no hay salto de dualidad para π . En el contexto más general de la PLSI, el teorema 8.1(v) en [21] establece que para un problema $\pi \in \Pi_c$ con $c \in rint(M)$, no hay salto de dualidad. No obstante, esta condición no garantiza que $(F^{op})^d \neq \emptyset$ como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6.1 Consideremos el problema de Programación Lineal semi-infinita

en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } x_1 + x_2 \\ \text{s.a } & x_2 \geq 0, t = 0 \\ & x_1 \geq -\frac{1}{t}, t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$cl(H) = conv(\{(0, 1, 0)', (1, 0, 0)'\}) + \mathbb{R}_+(0, 0, -1)'$$

Se tiene por tanto que $0_3 \in ext(H)$ y consecuentemente $\pi \in int(\Pi_c)$.

Por otra parte, es también fácil ver que $M = \mathbb{R}_+^2$ y, por tanto, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in int(M)$, en particular el problema dual

$$\begin{aligned} \pi^d : \quad & \sup \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \lambda_t b_t = \sup \sum_{t \in \mathbb{N}} \frac{-\lambda_t}{t} \\ \text{s.a } & \sum_{t \in \mathbb{N}} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(\mathbb{N} \cup \{0\})}, \end{aligned}$$

es consistente (i.e. $\pi \in \Pi_c^d$) y $v^d = v = 0$.

Veamos ahora que $(F^{op})^d = \emptyset$. En efecto, si $\lambda = (\lambda_t)_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in F^d$, se ha de verificar que $\sum_{t \in \mathbb{N}} \lambda_t = 1$ (y $\lambda_0 = 1$), por lo que existe un $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{t_0} > 0$ y consecuentemente $\sum_{t \in \mathbb{N}} \frac{-\lambda_t}{t} \leq \frac{-\lambda_{t_0}}{t_0} < 0$. Luego $v^d = 0$ nunca se alcanzará en una solución factible dual, es decir, $(F^{op})^d = \emptyset$.

El concepto de salto de dualidad para un problema π está estrechamente relacionado con la posibilidad de discretización del mismo, esto es, con la posibilidad de obtener una aproximación de v mediante los valores óptimos de subproblemas finitos de π . Ésta y otras muchas son las aplicaciones de la teoría de la dualidad. Nuestro objetivo en esta sección está encaminado, en una primera etapa, al estudio de la estabilidad del problema dual, π^d , asociado a cierto problema π , y en una segunda etapa, trataremos con la estabilidad del problema π mediante un enfoque

que involucra tanto al problema primal como al problema dual.

3.6.1 Medidas del mal planteamiento relativo a la consistencia del problema dual.

En esta subsección estudiamos la estabilidad de un problema de PLSI con respecto a la consistencia de su problema dual asociado. El siguiente resultado caracteriza aquellos problemas que están en el interior del conjunto de los problemas dual-consistentes.

Proposición 3.6.2 [25, Teorema 5] *Se tiene que*

$$\pi = (c, \sigma) \in \text{int}(\Pi_c^d) \text{ si y sólo si } c \in \text{int}(M).$$

Procede recordar que $c \in \text{int}(M)$ es equivalente a $0_n \in \text{int}(Z^-)$, donde $Z^- = \text{conv}(\{a_t, t \in T; -c\})$ (véase la observación 2.2.3).

A lo largo de esta memoria, hemos identificado los problemas mal planteados como aquéllos para los que perturbaciones arbitrariamente pequeñas de sus datos pueden dar lugar a problemas de diferentes tipos. Así, $bd(\Theta_{si})$ constituyó un concepto de mal-planteamiento para sistemas (que llamamos mal planteamiento generalizado), mientras que $bd(\Pi_s)$ se erigió en un concepto de mal planteamiento para problemas. Siguiendo con esta idea, el conjunto $bd(\Pi_c^d)$ constituye entonces otro tipo de mal planteamiento para problemas. En el siguiente resultado caracterizamos los problemas mal planteados en este nuevo sentido.

Proposición 3.6.3 *Se tiene que*

$$\pi \in bd(\Pi_c^d) \text{ si y sólo si } 0_n \in bd(Z^-).$$

Demostración. Veamos en primer lugar la condición “sólo si”. Tomemos, para ello, $\pi \in bd(\Pi_c^d)$, y una sucesión $\{\pi_r\} \subset \Pi_c^d$ convergente a π . Tenemos, por una

parte, que $c^r \in M_r$ para cada $r \in \mathbb{N}$ y, consecuentemente, $0_n \in Z_r^-$. Por otra parte, como $\pi \in bd(\Pi_c^d)$ la proposición 3.6.2 asegura que $0_n \notin int(Z^-)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $0_n \notin bd(Z^-)$, con lo que $0_n \in ext(Z^-)$. Como $\{\pi_r\}$ converge a π , el lema 1.3.1 asegura que $0_n \in ext(Z_r^-)$ para r suficientemente grande, lo cual constituye una contradicción.

Veamos ahora la condición “si”. Sea $0_n \in bd(Z^-)$ y tomemos una sucesión $\{u^r\} \subset rint(Z^-)$ convergente a 0_n . Para cada $r \in \mathbb{N}$ consideremos el problema $\pi_r := (c^r, \sigma_r)$ donde $c^r := c + u^r$, y $\sigma_r := \{(a_t - u^r)'x \geq b_t, t \in T\}$. Tenemos entonces que $0_n \in rint(Z_r^-)$ donde $Z_r^- = conv(\{a_t - u^r, t \in T\} \cup \{-(c + u^r)\})$, y por tanto, en virtud del corolario 0.2.5, $c^r = c + u^r \in rint(M_r) \subset M_r$ por lo que $\pi_r \in \Pi_c^d$ y, como $\{\pi_r\}$ converge a π , entonces $\pi \in cl(\Pi_c^d)$. Ahora bien, como $0_n \in bd(Z^-)$, la proposición 3.6.2 asegura que $\pi \notin int(\Pi_c^d)$ luego debe ser $\pi \in bd(\Pi_c^d)$, como queríamos demostrar. ■

Como consecuencia inmediata de esta proposición y de la proposición 3.6.2 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.6.4 *Se tienen las siguientes equivalencias:*

- (i) $\pi \in int(\Pi_c^d)$ si y sólo si $0_n \in int(Z^-)$;
- (ii) $\pi \in bd(\Pi_c^d)$ si y sólo si $0_n \in bd(Z^-)$;
- (iii) $\pi \in ext(\Pi_c^d)$ si y sólo si $0_n \in ext(Z^-)$.

Este corolario permite reescribir el teorema 2.2.4 relacionando los problemas resolubles con los problemas dual-consistentes, en $int(\Pi_c)$, suponiendo que las normas en \mathbb{R}^{n+1} y en \mathbb{R}^n satisfacen (2.1) y (2.2).

Corolario 3.6.5 *Dado $\pi \in int(\Pi_c)$, se tiene que*

- (i) $\pi \in int(\Pi_s)$ si y sólo si $\pi \in int(\Pi_c^d)$;
- (ii) $\pi \in bd(\Pi_s)$ si y sólo si $\pi \in bd(\Pi_c^d)$;
- (iii) $\pi \in ext(\Pi_s)$ si y sólo si $\pi \in ext(\Pi_c^d)$.

La distancia de un problema dual-consistente al conjunto Π_i^d , en el contexto de los sistemas lineales cónicos, fue utilizada por Renegar en [44] para obtener

cotas de los valores óptimos primal y dual de un problema π con $\delta(\pi, \Pi_i) > 0$ y con $\delta(\pi, \Pi_i^d) > 0$, así como para determinar la resolubilidad de dicho problema, encontrando el radio de una bola que contiene al conjunto óptimo, entre otras cosas. A continuación proporcionamos una fórmula explícita para calcular la distancia de un problema arbitrario a $bd(\Pi_c^d)$, esto es, la distancia al mal planteamiento con respecto a la dual-consistencia. Ahora, la norma considerada en \mathbb{R}^{n+1} es arbitraria mientras que la norma en \mathbb{R}^n viene dada por (2.2), esto es, $\|a\| := \left\| \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.6.6 *Sea $\pi \in \Pi$, entonces*

$$\delta(\pi, bd(\Pi_c^d)) = d(0_n, bd(Z^-)). \quad (3.30)$$

Demostración. Si $\pi \in bd(\Pi_c^d)$, tenemos del corolario 3.6.4 (apartado (ii)) que $0_n \in bd(Z^-)$ y por tanto (3.30) es trivial.

Supongamos ahora que $\pi \in int(\Pi_c^d)$. Veamos en primer lugar la desigualdad “ \geq ”. Si $\pi_1 \in \Pi$ es tal que $\delta(\pi, \pi_1) < d(0_n, bd(Z^-))$, entonces del lema 1.3.1 se deduce que $0_n \in int(Z_1^-)$ lo cual implica, en virtud del corolario 3.6.4 (apartado (i)), que $\pi_1 \in int(\Pi_c^d)$. Con el fin de establecer la desigualdad “ \leq ”, tomemos $u \in bd(Z^-)$ tal que $d(0_n, bd(Z^-)) = \|u\|$ y definamos $\pi_1 := (c + u, \sigma_{-u})$, donde $\sigma_{-u} := \{(a_t - u)'x \geq b_t, t \in T\}$. Tenemos, también ahora, $Z_1^- = Z^- - u$, luego $0_n \in bd(Z_1^-)$ y por tanto $\pi_1 \in bd(\Pi_c^d)$ de nuevo en virtud del corolario 3.6.4 (apartado (ii)). Así pues,

$$\delta(\pi, bd(\Pi_c^d)) \leq \delta(\pi, \pi_1) = \|u\| = d(0_n, bd(Z^-)).$$

Supongamos ahora que $\pi \in ext(\Pi_c^d)$. El razonamiento es análogo. Veamos en primer lugar la desigualdad “ \geq ”. Si $\pi_1 \in \Pi$ es tal que $\delta(\pi, \pi_1) < d(0_n, bd(Z^-))$, entonces del lema 1.3.1 se deduce que $0_n \in ext(Z_1^-)$ lo cual implica, en virtud del corolario 3.6.4 (apartado (iii)), que $\pi_1 \in ext(\Pi_c^d)$. Con el fin de establecer la

desigualdad “ \leq ”, tomemos $u \in bd(Z^-)$ tal que $d(0_n, bd(Z^-)) = \|u\|$ y definamos $\pi_1 := (c + u, \sigma_{-u})$, donde $\sigma_{-u} := \{(a_t - u)'x \geq b_t, t \in T\}$. Tenemos entonces que $Z_1^- = Z^- - u$, luego $0_n \in bd(Z_1^-)$ y, por tanto, $\pi_1 \in bd(\Pi_c^d)$ de nuevo en virtud del corolario 3.6.4 (apartado (ii)). Así pues,

$$\delta(\pi, bd(\Pi_c^d)) \leq \delta(\pi, \pi_1) = \|u\| = d(0_n, bd(Z^-)).$$

■

En el Capítulo 2 obtuvimos una fórmula de la distancia de un problema resoluble al conjunto de los problemas en $bd(\Pi_s)$. En la expresión de dicha fórmula, uno de los ingredientes era precisamente la distancia $d(0_n, bd(Z^-))$. Concretamente, para un problema $\pi \in cl(\Pi_s)$, obtuvimos (véase el teorema 2.3.1)

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = \min \{ \delta(\pi, bd(\Pi_c)), d(0_n, bd(Z^-)) \}.$$

Así, para $\pi \in cl(\Pi_s)$, la proposición 3.6.6 permite escribir esta fórmula como

$$\delta(\pi, bd(\Pi_s)) = \min \{ \delta(\pi, bd(\Pi_c)), \delta(\pi, bd(\Pi_c^d)) \}, \quad (3.31)$$

donde las normas en \mathbb{R}^{n+1} y en \mathbb{R}^n están sujetas de nuevo a (2.1) y (2.2).

3.6.2 Medidas del mal planteamiento relativo a la consistencia de los problemas primal y dual.

Diferentes autores han estudiado el conjunto de los problemas consistentes con dual consistente. Por ejemplo, en el contexto de la Programación Convexa, Nunez en [40] obtiene una caracterización de la frontera de este conjunto (identificado en este artículo con el mal planteamiento), combinando sus resultados con los obtenidos por Robinson en [47] donde se caracterizaba el interior del mismo. En el contexto de los sistemas lineales cónicos, Renegar introduce en [44] la distancia de un problema

consistente al mal planteamiento en este sentido, y proporciona ciertas cotas, en las que está involucrada esta distancia, para los valores óptimos de problemas próximos a uno dado. Por otra parte, en el contexto de la PLSI, [25] proporciona una caracterización para un problema que está en $\text{int}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$. Utilizando este resultado, proporcionamos, en esta subsección, una caracterización de los problemas en $\text{bd}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$ y, consecuentemente, de aquellos en $\text{ext}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$, mostrando la estrecha relación existente entre los problemas resolubles y los problemas consistentes con dual consistente.

Observación 3.6.7 La desigualdad (3.26) y las hipótesis bajo las cuales fue obtenida, establecen la siguiente inclusión de conjuntos

$$\Pi_c \cap \Pi_c^d \subset \Pi_b. \quad (3.32)$$

No obstante, la inclusión anterior es estricta como se deduce del siguiente problema en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } x_1 \\ \text{s.a.} \quad & tx_1 + \frac{1}{t}x_2 \geq 2, \quad t \in]0, +\infty[\end{aligned}$$

Es evidente que $\pi \in \Pi_c$ (F es el epigrafo de la hipérbola $y = 1/x$, $x > 0$). Asimismo es fácil ver que el valor óptimo de π es $v = 0$, con lo que $\pi \in \Pi_b$. Sin embargo, $c = (1, 0) \notin M =]0, +\infty[^2 \cup \{0_2\}$ y por tanto $\pi \notin \Pi_c^d$.

En el contexto de la Programación Lineal ordinaria se tiene que $\Pi_b = \Pi_s$, y por otra parte, si $\pi \in \Pi_b$ se tiene, en virtud del teorema 0.4.3, que $c \in \text{cl}(M) = M$, luego $\pi \in \Pi_c \cap \Pi_c^d$, así, se deduce de (3.32) la conocida identidad $\Pi_c \cap \Pi_c^d = \Pi_s$. No obstante, en el contexto de la PLSI, no se tienen inclusiones en ningún sentido, es decir, $\Pi_c \cap \Pi_c^d \not\subseteq \Pi_s$ y $\Pi_c \cap \Pi_c^d \not\supseteq \Pi_s$, como muestran los problemas del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6.8 Para ver que $\Pi_c \cap \Pi_c^d \not\subseteq \Pi_s$, consideremos el problema que resulta

de añadir al problema de la observación anterior la restricción $x_2 \geq 0$, esto es,

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } x_1 \\ \text{s.a.} \quad & t x_1 + \frac{1}{t} x_2 \geq 2, \quad t \in]0, +\infty[, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Como la restricción $x_1 \geq 0$ es redundante, el conjunto factible es el mismo que el del problema anterior y, por tanto, su valor óptimo sigue siendo $v = 0$, que no se alcanza en ningún punto factible, luego $\pi \notin \Pi_s$. Sin embargo, ahora se tiene que $M =]0, +\infty[\times [0, +\infty[\cup \{0_2\}$ y por tanto $c = (1, 0)' \in M$, es decir, $\pi \in \Pi_c^d$.

Veamos ahora que $\Pi_c \cap \Pi_c^d \not\subseteq \Pi_s$ y consideremos para ello el problema

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } x_1 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + t x_2 \geq 0, \quad t \in]0, +\infty[. \end{aligned}$$

El conjunto factible de π es el primer cuadrante, $[0, +\infty[^2$, y su valor óptimo, $v = 0$, se alcanza en $(0, 0)'$, luego $\pi \in \Pi_s$. Sin embargo, $M =]0, +\infty[^2 \cup \{0_2\}$ y por tanto $c = (1, 0)' \notin M$, es decir, $\pi \notin \Pi_c^d$.

La siguiente proposición establece que el conjunto de los problemas resolubles y el conjunto de los problemas consistentes con dual consistente, pese a ser distintos, tienen el mismo interior, la misma frontera y, consecuentemente, el mismo exterior. En particular, el mal planteamiento relativo a la resolubilidad coincide con el mal planteamiento relativo a la primal-dual consistencia (esto es, consistencia tanto del problema primal como del problema dual). En el siguiente resultado, y en los comentarios posteriores, las normas consideradas en \mathbb{R}^{n+1} y en \mathbb{R}^n están sujetas a (2.1) y (2.2).

Proposición 3.6.9 *Se tiene que*

- (i) $\pi \in \text{int}(\Pi_s)$ si y sólo si $\pi \in \text{int}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$;
- (ii) $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ si y sólo si $\pi \in \text{bd}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$;
- (iii) $\pi \in \text{ext}(\Pi_s)$ si y sólo si $\pi \in \text{ext}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$.

Demostración. La condición (i) es una consecuencia inmediata del corolario 3.6.5 (i), puesto que $\text{int}(\Pi_c) \cap \text{int}(\Pi_c^d) = \text{int}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$.

Con el fin de establecer la implicación “ \Leftarrow ” en (ii) tomemos $\pi \in \text{bd}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$. Entonces, de la observación 3.6.7 y del teorema 2.2.1 se obtiene que $\pi \in \text{cl}(\Pi_s)$, pero $\pi \notin \text{int}(\Pi_s)$ por el apartado (i), con lo cual $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$. Veamos ahora la implicación “ \Rightarrow ”. Tomemos para ello $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$ y $\pi_r = (c^r, \sigma_r) \in \Pi_s$ con $\{\pi_r\}$ convergente a π . Tenemos entonces, para cada $r \in \mathbb{N}$, que $\sigma_r \in \Theta_c$ y, en virtud del teorema 0.4.3 (ii), que $c^r \in \text{cl}(M_r)$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ sea $\{c^{r,k}\}_k \subset M_r$ convergente a c^r . Así, dado $r \in \mathbb{N}$ existe $k_r \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad $k_r \geq r$, tal que $\|c^{r,k} - c^r\| \leq \frac{1}{r}$ para todo $k \geq k_r$, en particular $\|c^{r,k_r} - c^r\| \leq \frac{1}{r}$. Veamos que $\{c^{r,k_r}\}$ converge a c . En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como $\{c^r\}$ converge a c , existe $r_0 \in \mathbb{N}$ con $r_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ tal que $\|c^r - c\| \leq \varepsilon$ para todo $r \geq r_0$, y por tanto, si $r \geq r_0$

$$\|c^{r,k_r} - c\| \leq \|c^{r,k_r} - c^r\| + \|c^r - c\| \leq \frac{1}{r} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Luego efectivamente $\{c^{r,k_r}\}$ converge a c y como $\{\sigma_r\}$ converge a σ entonces, si definimos, para cada $r \in \mathbb{N}$, el problema $\tilde{\pi}_r := (c^{r,k_r}, \sigma_r)$ tenemos que $\{\tilde{\pi}_r\}$ converge a π y, además, es evidente que $\tilde{\pi}_r \in \Pi_c$ y $c^{r,k_r} \in M_r = \widetilde{M}_r$, es decir, $\tilde{\pi}_r \in \Pi_c \cap \Pi_c^d$. Luego $\pi \in \text{cl}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$. Como partíamos de que $\pi \in \text{bd}(\Pi_s)$, de nuevo en virtud del apartado (i) $\pi \notin \text{int}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$, por lo que debe ser $\pi \in \text{bd}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$.

El apartado (iii) es una consecuencia inmediata de (i) y (ii). ■

En virtud de la proposición anterior tenemos que todos los resultados dados en el Capítulo 2 para caracterizar $\text{bd}(\Pi_s)$ y para calcular la distancia de un problema a $\text{bd}(\Pi_s)$ son también válidos reemplazando $\text{int}(\Pi_s)$, $\text{bd}(\Pi_s)$ y $\text{ext}(\Pi_s)$ por $\text{int}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$, $\text{bd}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$ y $\text{ext}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$, respectivamente. En particular, se deduce la fórmula (3.31) dada al final de la subsección anterior sin más que observar que la distancia de un problema $\pi \in \text{cl}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$ a $\text{bd}(\Pi_c \cap \Pi_c^d)$ es, en virtud del

corolario 1.2.3 (válido también para problemas),

$$\begin{aligned} \delta(\pi, bd(\Pi_c \cap \Pi_c^d)) &= \delta(\pi, \Pi \setminus (\Pi_c \cap \Pi_c^d)) = \delta(\pi, \Pi_c \cup \Pi_c^d) = \\ &= \min\{\delta(\pi, \Pi_c), \delta(\pi, \Pi_c^d)\} \\ &= \min\{\delta(\pi, bd(\Pi_c)), \delta(\pi, bd(\Pi_c^d))\}. \end{aligned}$$

3.6.3 Estudio de la estabilidad cuando las perturbaciones recaen sobre el término independiente

El estudio de la estabilidad de un sistema cuando sólo se permiten perturbaciones de los términos independientes del mismo, ha sido objeto de investigación en diferentes trabajos (véase [44] o Peña [42] en el contexto de los sistemas lineales cónicos). En la presente subsección aportamos algunos resultados en esta línea.

Algunos conceptos acerca de soluciones asintóticas.

En los siguientes párrafos introducimos algunos conceptos bien conocidos (véase [21] para más detalles) acerca de soluciones asintóticas del problema primal y del problema dual, que serán de utilidad en resultados posteriores.

En ocasiones, dado un sistema de restricciones lineales $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ inconsistente, existe una sucesión $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $t \in T$, verifica

$$\liminf_k (a'_t x^k) \geq b_t,$$

donde $+\infty$ está permitido como límite. Una tal sucesión se llama *solución asintótica* de σ . En tal caso se dice que el sistema σ es *asintóticamente consistente*.

Es evidente que si x^0 es una solución ordinaria de σ (i.e. $x^0 \in F$), la sucesión constante $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x^0\}$ es una solución asintótica de σ . Así pues, si F^a representa el conjunto de soluciones asintóticas de σ , y denotamos por $\overline{F} := \{\{x^0\} \subset \mathbb{R}^n \mid x^0 \in F\}$, entonces $\overline{F} \subset F^a$.

Así pues, dado el problema de optimización lineal $\pi = (c, \sigma)$, cabría considerar el valor

$$v^a := \inf_{\{x^k\} \in F^a} \left\{ \liminf_k (c'x^k) \right\}.$$

A este valor se le llama *valor óptimo asintótico* de π . Se tiene que si $\pi \in \Pi_c$, $F^a \neq \emptyset$ y $v^a < +\infty$. En este caso, el teorema 8.5(ii) de [21] (debido a Kortanek [36], [37]), establece que $v^a = v^d$. Ambos valores podrían ser $-\infty$ (en cuyo caso $\pi \in \Pi_i^d$).

Por su parte, dado un problema de optimización lineal $\pi = (c, \sigma)$, donde $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, puede también ocurrir que $\pi \in \Pi_i^d$ y que, sin embargo, exista una sucesión $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que

$$c = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k a_t.$$

A una tal sucesión se le llama *solución dual asintótica* de π (o *solución asintótica* de π^d), y, en tal caso, se dice que el problema π es *asintóticamente dual-consistente* (o que el problema dual π^d es *asintóticamente consistente*). También ahora, si $\lambda^0 \in F^d$, la sucesión constante $\{\lambda^k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\lambda^0\}$ es una solución dual asintótica de π , por lo que si representamos por F^{da} el conjunto de todas las soluciones duales asintóticas de π , y $\overline{F}^d := \left\{ \{\lambda^0\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \lambda^0 \in F^d \right\}$, entonces $\overline{F}^d \subset F^{da}$. Ahora, cabría considerar el valor

$$v^{da} := \sup_{\{\lambda^k\} \in F^{da}} \left\{ \limsup_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k b_t \right\}.$$

A este valor se le llama *valor óptimo dual asintótico* de π . Se tiene que si $\pi \in \Pi_c^d$ entonces $F^{da} \neq \emptyset$ y $v^{da} > -\infty$. En este caso, el teorema 8.1(ii) en [21] permite afirmar que $v^{da} = v$, pudiendo ser ambos valores $+\infty$ (en cuyo caso sería $\pi \in \Pi_i$).

Ejemplo 3.6.10 En el ejemplo 3.6.1, consideráramos el problema de PL

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \text{Inf } x_1 + x_2 \\ \text{s.a } & x_2 \geq 0, \quad t = 0 \\ & x_1 \geq -\frac{1}{t}, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

y veíamos que $\pi \in \Pi_c^d$. Por lo comentado en los párrafos anteriores se cumple, para este problema, que $F^{da} \neq \emptyset$ y $v^{da} = v = 0$. A continuación proporcionamos una solución dual asintótica de π en la que se alcanza el valor óptimo dual asintótico. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_t^k := \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{k} & \text{si } t = 1, \\ 1 - \frac{1}{k} & \text{si } t = k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(\mathbb{N} \cup \{0\})}$, y

$$\lim_k \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \lambda_t^k a_t = \lim_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c,$$

luego $\{\lambda^k\}$ es una solución dual asintótica de π . Además, en $\{\lambda^k\}$ se alcanza el valor óptimo dual asintótico de π , en efecto

$$\lim_k \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \lambda_t^k b_t = \lim_k \left(\frac{1}{k} (-1) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{-1}{k} \right) = 0 = v^{da} = v.$$

Estabilidad del valor óptimo dual.

A continuación proporcionamos un resultado acerca de la estabilidad del valor óptimo del problema dual cuando se consideran únicamente perturbaciones de los tér-

minos independientes de las restricciones del sistema asociado. Esto es, si $\pi = (c, \sigma)$ con $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, se considerarán problemas (perturbados de π) del tipo $\pi_1 = (c, \sigma_1)$ con $\sigma_1 := \{a'_t x \geq b_t^1, t \in T\}$.

Proposición 3.6.11 *Sea $\pi = (c, \sigma) \in \text{int}(\Pi_c)$ con $c \neq 0_n$. Supongamos adicionalmente que $\pi \in \Pi_c^d$, y consideremos el problema perturbado $\pi_1 = (c, \sigma_1)$ donde $\sigma_1 := \{a'_t x \geq b_t^1, t \in T\}$. Entonces*

$$v^d - v_1^d \leq \sup_{t \in T} |b_t - b_t^1| \frac{\left\| \begin{pmatrix} c \\ [-v^d]_+ \end{pmatrix} \right\|}{d(\sigma, \Theta_i)}. \quad (3.33)$$

Demostración. Es evidente que $\sup_{t \in T} |b_t - b_t^1| = d(\sigma, \sigma_1)$, y que si esta distancia es $+\infty$, (3.33) se cumple trivialmente.

Por las hipótesis actuales, y por las consideraciones hechas en los párrafos anteriores acerca de soluciones asintóticas, sabemos que v^d es finito y, por tanto, existe $\{\lambda^k\} \subset F^d$ tal que $\lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k b_t = v^d$. Así,

$$\begin{pmatrix} c \\ v^d \end{pmatrix} = \lim_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},$$

y, en virtud del lema 3.2.1, tenemos que

$$\limsup_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \leq \frac{\left\| \begin{pmatrix} c \\ [-v^d]_+ \end{pmatrix} \right\|}{d(\sigma, \Theta_i)}. \quad (3.34)$$

Ahora bien, como $\{\lambda^k\} \subset F^d = F_1^d$, podemos escribir

$$\begin{aligned} v_1^d &\geq \limsup_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k b_t^1 = v^d + \limsup_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k (b_t^1 - b_t) \\ &\geq v^d + \limsup_k \left(- \sum_{t \in T} \lambda_t^k \sup_{t \in T} |b_t^1 - b_t| \right) \\ &= v^d - \sup_{t \in T} |b_t^1 - b_t| \liminf_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k, \end{aligned}$$

de donde se tiene, junto con (3.34), que

$$\begin{aligned} v^d - v_1^d &\leq \sup_{t \in T} |b_t^1 - b_t| \liminf_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \leq \sup_{t \in T} |b_t^1 - b_t| \limsup_k \sum_{t \in T} \lambda_t^k \\ &\leq \sup_{t \in T} |b_t^1 - b_t| \frac{\left\| \begin{pmatrix} c \\ [-v^d]_+ \end{pmatrix} \right\|}{d(\sigma, \Theta_i)}. \end{aligned}$$

■

Un enfoque primal-dual de la estabilidad del conjunto factible.

A continuación presentamos un enfoque primal-dual de la estabilidad del conjunto factible, de nuevo suponiendo que las perturbaciones recaen únicamente sobre los términos independientes del sistema de restricciones. Concretamente, obtendremos, de una forma alternativa al enfoque primal (directo) de la sección 3.2, la desigualdad de tipo Hoffman dada en el corolario 3.2.9 de dicha sección, a través de la cual se acota la distancia de un punto cualquiera $z \in \mathbb{R}^n$ al conjunto factible, F , de un sistema dado σ . Supondremos, además, que en \mathbb{R}^{n+1} tenemos definida la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| := \max \{ \|a\|_*, |b| \},$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Los razonamientos que utilizaremos a continuación se inspiran en [44] pero, desde el punto de vista técnico, procede resaltar la siguiente diferencia sustancial. En [44] el sistema que hace las veces de nuestro sistema σ es

$$\left. \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

donde $x \in X$ y $b \in Y$, siendo X e Y espacios normados, 0 el origen de X , $x_1 \geq x_2$ si y sólo si $x_1 - x_2 \in C_X$ donde C_X es un cono convexo cerrado en X , $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ (i.e., A es un operador lineal acotado -es decir, continuo- de X en Y) y, en Y , $b_1 \geq b_2$ si y sólo si $b_1 - b_2 \in C_Y$, cono convexo y cerrado de Y . La diferencia a

la que nos referimos es que, en PLSI, $X = \mathbb{R}^n$, $C_X = \mathbb{R}_+^n$, $Y = \mathbb{R}^T$, $C_Y = \mathbb{R}_+^T$ y $Ax = (a'_t x)_{t \in T}$, con lo que resulta obvio que Y no es un espacio normado, suponiendo que la topología considerada en \mathbb{R}^T es la topología producto (o de la convergencia puntual). Las técnicas de espacios normados no podrán ser aplicadas en nuestro caso. En particular, la convergencia en \mathbb{R}^T será descrita en términos de redes (de puntos) o filtros (de conjuntos). Los resultados utilizados de la teoría general de espacios topológicos pueden encontrarse, por ejemplo, en Kelley [34]. También aplicaremos la teoría de la dualidad de la PLSI (véase, por ejemplo, [21, Capítulo 8]).

Proposición 3.6.12 *Consideremos un sistema $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ que verifica $d(\sigma, \Theta_i) > 0$ (i.e., $\sigma \in \text{int}(\Theta_c)$), y asumamos que $z \in \mathbb{R}^n$ satisface*

$$d(z, F) > \rho > 0.$$

Entonces, existirá $c \neq 0_n$ tal que si $\pi := (c, \sigma)$ se cumple

$$v^d > c'z + \|c\|_* \rho.$$

Demostración. Dividimos la prueba en tres etapas:

Etapa 1: Dado $b = (b_t) \in \mathbb{R}^T$, veremos que existe un entorno $\tilde{\mathcal{U}}$ de b , en la topología producto de \mathbb{R}^T , tal que si $\tilde{b} = (\tilde{b}_t) \in \tilde{\mathcal{U}}$ entonces

$$\tilde{F} \cap \{z + \rho \text{cl}(B)\} = \emptyset \tag{3.35}$$

donde \tilde{F} es el conjunto factible de $\tilde{\sigma} := \{a'_t x \geq \tilde{b}_t, t \in T\}$.

Etapa 2: Se introduce el conjunto

$$\mathbb{F} := \bigcup_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{U}}} \tilde{F}.$$

y se demuestra la existencia de $c \neq 0_n$ tal que

$$\inf \{c'y \mid y \in \mathbb{F}\} > c'z + \|c\|_* \rho.$$

Etapa 3: Se define el problema $\pi := (c, \sigma)$ y se prueba, definiendo una solución asintótica adecuada y utilizando el Teorema 8.5(ii) de [21], que

$$v^d = v^a > c'z + \|c\|_* \rho.$$

Iniciemos, entonces, la etapa 1. Supongamos, por reducción al absurdo, que para todo entorno \mathcal{U} de b existe $b^\mathcal{U} = (b_t^\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ tal que

$$F_{\mathcal{U}} \cap \{z + \rho cl(B)\} \neq \emptyset$$

donde $F_{\mathcal{U}}$ es el conjunto factible del sistema asociado $\sigma_{\mathcal{U}} := \{a'_t x \geq b_t^\mathcal{U}, t \in T\}$, i.e.

$$F_{\mathcal{U}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x \geq b_t^\mathcal{U}, \text{ para todo } t \in T\}.$$

Si consideramos el filtro $\mathfrak{U}(b)$ de todos los entornos de b (siempre en la topología producto), sabemos (véase, por ejemplo, Köthe [38, pág. 11]) que

$$\{b^\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(b)\}$$

es una red, llamada red correspondiente al filtro $\mathfrak{U}(b)$ ($\mathfrak{U}(b)$ es un conjunto dirigido por la inclusión de conjuntos).

Es también sabido que la red $\{b^\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(b)\}$ converge a b ([38, (2) en pág. 13]) al ser $\mathfrak{U}(b)$ un filtro que converge a b . Consideremos, ahora, la red asociada

$$\{x^\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(b)\}$$

donde $x^{\mathcal{U}} \in F_{\mathcal{U}} \cap \{z + \rho cl(B)\}$, para todo $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(b)$. Esta red, por estar contenida en un compacto, tendrá una subred convergente (véase [34, Cap. 5, Teorema 2]) a un cierto punto $\hat{x} \in z + \rho cl(B)$. Representaremos esta subred por $\{x^{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \hat{\mathfrak{U}}(b)\}$, donde $\hat{\mathfrak{U}}(b)$ es un subconjunto cofinal de $\mathfrak{U}(b)$ para la relación de inclusión. Entonces, para cada $t \in T$, y puesto que $\lim_{\mathcal{U} \in \hat{\mathfrak{U}}(b)} b^{\mathcal{U}} = b$,

$$a'_t \hat{x} = \lim_{\mathcal{U} \in \hat{\mathfrak{U}}(b)} (a'_t x^{\mathcal{U}}) \geq \lim_{\mathcal{U} \in \hat{\mathfrak{U}}(b)} (b_t^{\mathcal{U}}) = b_t.$$

Concluimos que $\hat{x} \in F \cap \{z + \rho cl(B)\}$, lo cual representa una contradicción con las hipótesis.

Veamos ahora la segunda etapa. No implica pérdida de generalidad alguna suponer que $\tilde{\mathcal{U}} = \prod_{t \in T} \tilde{\mathcal{U}}_t$, donde

$$\tilde{\mathcal{U}}_t = \begin{cases} [b_t - \delta, b_t + \delta], & \text{si } t \in S, \\ \mathbb{R} & \text{si } t \notin S, \end{cases}$$

donde $\delta > 0$ y S es un subconjunto finito de T , puesto que los entornos de este tipo forman una base de $\mathfrak{U}(b)$ en la topología producto de \mathbb{R}^T .

Consideremos el conjunto no vacío

$$\mathbb{F} := \bigcup_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{U}}} \tilde{F}.$$

donde

$$\tilde{F} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x \geq \tilde{b}_t, \text{ para todo } t \in T \right\}.$$

Veamos que

$$\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x \geq b_t - \delta, \text{ para todo } t \in S\},$$

con lo que \mathbb{F} será un subconjunto convexo y cerrado de \mathbb{R}^n . En efecto, con el fin de establecer el contenido no trivial “ \supset ” tomemos $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'_t \bar{x} \geq b_t - \delta$, para

todo $t \in S$, y veamos que existe $\bar{b} \in \tilde{\mathcal{U}}$ tal que $\bar{x} \in \bar{F}$. Para ello, basta considerar \bar{b} dado, para cada $t \in T$, por

$$\bar{b}_t := \begin{cases} b_t - \delta, & \text{si } t \in S, \\ a'_t \bar{x}, & \text{si } t \in T \setminus S. \end{cases}$$

Dado que $\mathbb{F} + \rho cl(B)$ es convexo y cerrado y, en virtud de (3.35), $z \notin \mathbb{F} + \rho cl(B)$, se pueden separar estrictamente z y $\mathbb{F} + \rho cl(B)$, por lo que existirá $c \neq 0_n$ tal que

$$c'z < \inf \{c'x \mid x \in \mathbb{F} + \rho cl(B)\} = \inf \{c'y + c'w \mid y \in \mathbb{F} \text{ y } \|w\| \leq \rho\} \quad (3.36)$$

Ahora bien, por una parte $c'w \geq -\|c\|_* \rho$ y, por otra parte, sabemos que existe $w \in \mathbb{R}^n$ con $\|w\| = \rho$ tal que $c'w = -\|c\|_* \rho$, (véase el lema 0.2.2). Por tanto

$$\begin{aligned} \inf \{c'y + c'w \mid y \in \mathbb{F} \text{ y } \|w\| \leq \rho\} &= \inf \{c'y - \|c\|_* \rho \mid y \in \mathbb{F}\} \\ &= \inf \{c'y \mid y \in \mathbb{F}\} - \|c\|_* \rho. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por lo tanto, de (3.36) y de (3.37) tenemos, para $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{U}}$, que

$$\inf \{c'y \mid y \in \mathbb{F}\} > c'z + \|c\|_* \rho.$$

Abordemos, por último, la tercera etapa que consiste en aplicar el Teorema 8.5(ii) de [21]. Sea $\{x^k\}$ una solución asintótica cualquiera de σ . El teorema 2.1 en [22] proporciona la descomposición

$$a'_t x^k - b_t = c_t^k + d_t^k, \quad t \in T,$$

siendo $c_t^k \geq 0$ y $\lim_k d_t^k = 0$, de nuevo para todo $t \in T$.

Si consideramos $\hat{b}^k \in \mathbb{R}^T$, con $\hat{b}_t^k := b_t + d_t^k$, para cada $t \in T$, es obvio que $\{\hat{b}^k\}$ converge a b (en la topología producto) y que x^k es solución del sistema $\hat{\sigma}^k := \{a'_t x \geq \hat{b}_t^k, \quad t \in T\}$. Como $\lim_k \hat{b}^k = b$, existirá un k_0 tal que $\hat{b}^k \in \tilde{\mathcal{U}}$, para

todo $k \geq k_0$. Por lo tanto, $x^k \in \mathbb{F}$ siempre que $k \geq k_0$.

Si consideramos ahora el par $\pi = (c, \sigma)$ donde c es el vector director del hiperplano de separación entre z y $\mathbb{F} + \rho \text{cl}(B)$ considerado anteriormente, tendremos que, para todo $k \geq k_0$,

$$c'x^k \geq \inf \{c'y \mid y \in \mathbb{F}\}$$

y, en consecuencia,

$$\liminf_k (c'x^k) \geq \inf \{c'y \mid y \in \mathbb{F}\},$$

y $v^a = v^d > c'z + \|c\|_* \rho$. ■

Proposición 3.6.13 *Sea $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ tal que $d(\sigma, \Theta_i) > 0$. Consideremos también $\tilde{\sigma} := \{a'_t x \geq \tilde{b}_t, t \in T\}$ y $z \in \tilde{F}$. Entonces*

$$d(z, F) \leq \sup_{t \in T} \left| b_t - \tilde{b}_t \right| \frac{\max \{1, \|z\|\}}{d(\sigma, \Theta_i)}. \quad (3.38)$$

Demostración. La desigualdad (3.38) es trivialmente válida si $\sigma = \tilde{\sigma}$ o es

$$d(\sigma, \tilde{\sigma}) = \sup_{t \in T} \left| b_t - \tilde{b}_t \right| = +\infty.$$

Supondremos pues que $0 < d(\sigma, \tilde{\sigma}) < +\infty$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $d(z, F) > \rho$ con

$$\rho := d(\sigma, \tilde{\sigma}) \frac{\max \{1, \|z\|\}}{d(\sigma, \Theta_i)}.$$

Dado que σ , z y ρ satisfacen las hipótesis de la proposición anterior, existirá $c \neq 0_n$ tal que $\pi := (c, \sigma)$ satisface

$$v^d > c'z + \|c\|_* d(\sigma, \tilde{\sigma}) \frac{\max \{1, \|z\|\}}{d(\sigma, \Theta_i)}. \quad (3.39)$$

Puesto que z es primal-factible para $\tilde{\pi} := (c, \tilde{\sigma})$ se verificará, por la desigualdad dual,

$$c'z \geq \tilde{v}^d. \quad (3.40)$$

Combinando (3.39) y (3.40) se deduce que

$$v^d - \tilde{v}^d > \|c\|_* d(\sigma, \tilde{\sigma}) \frac{\max\{1, \|z\|\}}{d(\sigma, \Theta_i)},$$

y por la proposición 3.6.11 (bajo las actuales hipótesis v^d es finito y, en consecuencia, $F^d \neq \emptyset$), y tras la oportuna simplificación, obtenemos

$$\max\{\|c\|_*, -v^d\} > \|c\|_* \max\{1, \|z\|\} = \max\{\|c\|_*, \|c\|_* \|z\|\},$$

lo cual implica

$$-v^d > \|c\|_* \|z\| \geq -c'z,$$

i.e., $v^d < c'z$, en contradicción con (3.39). ■

Corolario 3.6.14 *Sea $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ tal que $d(\sigma, \Theta_i) > 0$. Para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$d(z, F) \leq \sup_{t \in T} [b_t - a'_t z]_+ \frac{\max\{1, \|z\|\}}{d(\sigma, \Theta_i)}.$$

Demostración. Considérese el sistema $\tilde{\sigma} := \{a'_t x \geq \tilde{b}_t, t \in T\}$ con $\tilde{b}_t := b_t - [b_t - a'_t z]_+$ para cada $t \in T$. Es obvio que $z \in \tilde{F}$ y que $d(\sigma, \tilde{\sigma}) = \sup_{t \in T} [b_t - a'_t z]_+$. Bastará entonces con aplicar la proposición 3.6.13. ■

Bibliografía

- [1] Anderson, E.J., Nash, P. (1987): *Linear Programming in Infinite Dimensional Spaces: Theory and Applications*, Wiley, Chichester (UK).
- [2] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M. (1993): *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Berge, C. (1963): *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, London.
- [4] Brosowski, B. (1982): *Parametric Semi-Infinite Optimization*, Verlag Peter Lang, Frankfurt-Am-Main.
- [5] Brosowski, B. (1984): *Parametric semi-infinite linear programming I. Continuity of the feasible set and of the optimal value*, Math. Program. Study **21**, 18-42.
- [6] Cánovas, M.J., López, M.A., Ortega, E.M., Parra, J. (2002): *Upper semicontinuity of closed convex valued multifunctions*, Technical Report, Operations Research Center, Miguel Hernández University of Elche.
- [7] Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Todorov, M.I. (1999): *Stability and well-posedness in linear semi-infinite programming*, SIAM J. Optim. **10**, 82-98.
- [8] Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Todorov, M.I. (2001): *Solving strategies and well-posedness in linear semi-infinite programming*, Ann. Oper. Res. **101**, 171-190.

- [9] Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J. (2002): *Upper semicontinuity of the feasible set mapping for linear inequality systems*, Set-Val. Anal., **10**, 361-378.
- [10] Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J. (2002): *Stability of the feasible set for linear inequality systems: A carrier index set approach*, Linear Algebra Appl. **357**, 83-105.
- [11] Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J. (2002): *Stability in the discretization of a parametric semi-infinite convex inequality system*, Math. Oper. Res. **27**(4), 755-774.
- [12] Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J. (2001): *Distance to ill-posedness and consistency value of linear semi-infinite inequality systems*, Technical Report, Operations Research Center, Miguel Hernández University of Elche.
- [13] Dantzig, G.B., Folkman, J., Shapiro, N. (1967): *On the continuity of the minimum set of a continuous function*, J. Math. Anal. Appl. **17**, 519-548.
- [14] Dontchev, A.L., Lewis, A.S., Rockafellar R.T. (2002): *The radius of metric regularity*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2), 493-517.
- [15] Dontchev, A.L., Rockafellar R.T. (2003): *Regularity properties and conditioning in variational analysis and optimization*, preprint.
- [16] Duffin, R.J. (1956): *Infinite programs*, in H.W. Kuhn and A.W. Tucker, eds., Linear Equalities and Related Systems, pp. 157-170, Princeton University Press, Princeton.
- [17] Fischer, T. (1983): *Contributions to semi-infinite linear programming*, in Approximation and Optimization in Mathematical Physics, B. Brosowski and E. Martensen, eds., Peter Lang, Frankfurt-Am-Main, 175-199.

-
- [18] Epelman, M., Freund, R.M. (2000): *Condition number complexity of an elementary algorithm for computing a reliable solution of a conic linear system*, Math. Program. **88A**, 451-485.
- [19] Freund, R.M., Vera, J.R. (1999): *Some characterizations and properties of the “distance to ill-posedness” and the condition measure of a conic linear system*, Math. Program. **86A**, 225-260.
- [20] Goberna, M.A., López, M.A. (1996): *Topological stability of linear semi-infinite inequality systems*, J. Optimization Theory Appl. **89**, 227-236.
- [21] Goberna, M.A., López, M.A. (1998): *Linear Semi-Infinite Optimization*, John Wiley and Sons, Chichester (UK).
- [22] Goberna M.A., López, M.A., Mira J.A., Valls, J. (1995): *On the existence of solutions for linear inequality systems*, J. Math. Anal. Appl. **192**, 133-150.
- [23] Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I. (1996): *Stability theory for linear inequality systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17**, 730-743.
- [24] Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I. (1997): *Stability theory for linear inequality systems II: upper semicontinuity of the solution set mapping*, SIAM J. Optim. **7**, 1138-1151.
- [25] Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I. (2001): *On the stability of the feasible set in linear optimization*, Set-Val. Anal. **9**, 75-99.
- [26] Hettich, R., Kortanek, K.O. (1993): *Semi-infinite programming: Theory, methods and applications*, SIAM Review **35**, 380-429.
- [27] Hiriart-Urruty, J.B., Lemarechal, C. (1993): *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer-Verlag, New York.
- [28] Hoffman, A.J. (1952): *On approximate solutions of systems of linear inequalities*, Journal of Research of the National Bureau of Standards **49**, 263-265.

- [29] Holmes R.B. (1975): *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [30] Ioffe, A.D. (1981): *Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings*, Transactions of the American Mathematical Society, **266**, 1-56.
- [31] Jiménez, M.A., Rückmann, J.J. (1995): *On equivalent stability properties in semi-infinite optimization*, Z. für Operations Res., **41**, 175-190.
- [32] Jongen, T.H., Rückmann, J.J., Weber, G.W. (1994): *One-parametric semi-infinite optimization: on the stability of the feasible set*, SIAM J. Optim., **4**, 637-648.
- [33] Jongen, T.H., Stein, O. (1997): *On generic one-parametric semi-infinite optimization*, SIAM J. Optim., **7**(4), 1103-1137.
- [34] Kelley, J.L. (1955): *General Topology*, D. van Nostrand Company Ind., New York.
- [35] Klatte, D., Kummer, B. (2002): *Nonsmooth Equations in Optimization: Regularity, Calculus, Methods and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (NL).
- [36] Kortanek, K.O. (1976): *Perfect duality in generalized linear programming*, In: *Proceeding of the 9th International Symposium on Mathematical Programming*, Amsterdam: North-Holland, 43-58.
- [37] Kortanek, K.O. (1977): *Constructing a perfect duality in infinite programming*, Appl. Math. Opt. **3**, 357-372.
- [38] Köthe G. (1969): *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag.

- [39] López, M.A., Vera de Serio, V.N. (2001): Stability of the feasible set mapping in convex semi-infinite programming, M.A. Goberna, M.A. López, eds. *Semi-Infinite Programming: Recent Advances*, Kluwer, Boston/London, 1-8.
- [40] Nunez, M.A. (2002): *A characterization of ill-posed data instances for convex programming*, Math. Program. **91**(2), 375-390.
- [41] Nunez, M.A., Freund, R.M. (1998): *Condition measures and properties of the central trajectory of a linear program*, Math. Program. **83**(1), 1-28.
- [42] Peña, J. (2000): *Understanding the geometry of infeasible perturbations of a conic linear system*, SIAM J. Optim. **10**(2), 534-550.
- [43] Reemtsen, R., Rückmann, J.J. (1998): *Semi-Infinite Programming*, Kluwer, Dordrecht (NL).
- [44] Renegar, J. (1994): *Some perturbation theory for linear programming*, Math. Program. **65A**, 73-91.
- [45] Renegar, J. (1995): *Linear programming, complexity theory and elementary functional analysis*, Math. Program. **70**, 279-351.
- [46] Robinson, S.M. (1975): *Stability theory for systems of inequalities. Part I: linear systems*, SIAM J. Numer. Anal., **12**, 754-769.
- [47] Robinson, S.M. (1977): *A characterization of stability in linear programming*, Oper. Res. **25**(3), 435-447.
- [48] Rockafellar, R.T. (1970): *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [49] Rockafellar, R.T., Wets R.J.-B. (1998): *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlín.

- [50] Todorov, M. I. (1985-86), *Generic existence and uniqueness of the solution set to linear semi-infinite optimization problems*, Numer. Funct. Anal. Optim., 8, pp. 27-39.
- [51] Tuy, H. (1977): *Stability property of a system of inequalities*, Math. Oper. Statist. Series Opt. **8**, 27-39.
- [52] Vera, J.R. (1996): *Ill-posedness and the complexity of deciding existence of solutions to linear programs*, SIAM J. Optim. **6**(3), 549-569.
- [53] Williams, R.T. (1963): *Marginal values in linear programming*, SIAM J. Appl. Math. **11**, 82-94.
- [54] Zhu, Y.J. (1966): *Generalizations of some fundamental theorems on linear inequalities*, Acta Math. Sin. **16**, 25-40.



Símbolos y abreviaturas

A : envoltura convexa de $\{a_t, t \in T\}$ (véase σ)

$aff(X)$: envoltura afín (o afinidad) del conjunto $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$

a_t : vector de coeficientes de la restricción t -ésima del sistema σ (véase σ)

B : bola unidad abierta para la norma $\|\cdot\|$

$bd(X)$: frontera del conjunto X

b_t : término independiente de la restricción t -ésima del sistema σ (véase σ)

c : coeficiente de la función objetivo del problema π

C : envoltura convexa de $\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\}$ (véase σ)

$cl(X)$: clausura (o adherencia) del conjunto X

$cone(X)$: cono convexo generado por el conjunto $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$

$conv(X)$: envoltura convexa del conjunto $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$

d : distancia en $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$, y distancia extendida en el espacio paramétrico Θ

d_* : distancia correspondiente a la norma dual, $\|\cdot\|_*$

δ : distancia extendida en el espacio paramétrico Π

$ext(X)$: exterior del conjunto X

F, F^R, F^d : conjunto factible de σ (o de π), de σ^R y de π^d , respectivamente

$F^{op}, (F^{op})^d$: conjunto óptimo de π y de π^d respectivamente

F^a : conjunto de soluciones asintóticas de σ

F^{da} : conjunto de soluciones duales asintóticas de π

$\mathcal{F} : \Theta \rightrightarrows \mathbb{R}^n$: (multi)función conjunto factible

\mathcal{F}^{-1} : (multi)función inversa de \mathcal{F}

- φ : función que a cada $\lambda \in \mathbb{R}_+$ le hace corresponder $\max_{\|u\|_* = 1, u \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|$
- φ_* : función que a cada $\lambda \in \mathbb{R}_+$ le hace corresponder $\max_{\|u\| = 1, u \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|_*$
- $gph\mathcal{F}$: grafo de la (multi)función \mathcal{F}
- H : conjunto hipográfico asociado a σ
- $\inf X$: ínfimo del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ ($\inf \emptyset := +\infty$)
- $\text{int}(X)$: interior del conjunto X
- $\text{int}_c(\tilde{\Pi})$: interior del subconjunto $\tilde{\Pi}$ en la topología relativa a Π_c
- κ : valor de consistencia de σ
- K : cono característico de σ
- \lim_r o $\lim_{r \rightarrow \infty}$: límite cuando r tiende a $+\infty$
- $\liminf_r \mu_r$: límite inferior de la sucesión $\{\mu_r\} \subset \mathbb{R}$
- $\limsup_r \mu_r$: límite superior de la sucesión $\{\mu_r\} \subset \mathbb{R}$
- $\mu_r \downarrow a$: $\lim_r \mu_r = a$ y $\{\mu_r\}$ decreciente a partir de un cierto $r_0 \in \mathbb{N}$
- lsc : semicontinua inferiormente (en el sentido de Berge)
- M : primer cono de momentos de σ
- N, N^R : segundo cono de momentos de σ y de σ^R , respectivamente
- $\|\cdot\|$: norma en \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$
- $\|\cdot\|_*$: norma dual de $\|\cdot\|$
- $\|\cdot\|_p$: p -norma en \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ ($p = +\infty$: norma de Chebyshev)
- $O^+(X)$: cono de recesión del conjunto convexo $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$
- PC : Programación Convexa
- PL : Programación Lineal
- PSI : Programación Semi-Infinita
- PLSI : PL Semi-Infinita
- $\pi \equiv (c, \sigma) : \equiv \text{Inf}\{c'x \mid a_t'x \geq b_t, t \in T\} \in \Pi$ (problema de PLSI)
- π^d : problema dual asociado a π (en el sentido de Haar)
- Π : espacio paramétrico de los problemas de PLSI con T fijo
- Π_c : subconjunto de Π formado por los problemas consistentes

- Π_i : subconjunto de Π formado por los problemas inconsistentes
- Π_b : subconjunto de Π formado por los problemas acotados
- Π_s : subconjunto de Π formado por los problemas resolubles
- Π_c^d : subconjunto de Π formado por los problemas dual-consistentes
- Π_i^d : subconjunto de Π formado por los problemas dual-inconsistentes
- $[\alpha]_+$: parte positiva de α
- $\text{rint}(X)$: interior relativo del conjunto X
- \mathbb{R}_+ : intervalo $[0, +\infty[$
- \mathbb{R}_+^n : producto cartesiano $(\mathbb{R}_+)^n$
- $\mathbb{R}_+^{(T)}$: cono de todas las funciones $\lambda : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ con soporte finito
- s.a : abreviatura de la expresión “sujeta a”
- § : sección o subsección
- $\text{span}(X)$: subespacio vectorial generado por el conjunto $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$
- SSC : condición fuerte de Slater (“strong Slater condition”)
- $\sup X$: supremo del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ ($\sup \emptyset := -\infty$)
- $\sigma := \{a'_t x \geq b_t, t \in T\} \in \Theta$ (sistema de restricciones asociado a π)
- σ^R : sistema reforzado asociado al sistema σ
- T : conjunto arbitrario de índices (asociado al sistema σ)
- Θ : espacio paramétrico de los sistemas con conjunto de índices T
- Θ_c : subconjunto de Θ formado por los sistemas consistentes
- Θ_i : subconjunto de Θ formado por los sistemas inconsistentes
- Θ_{si} : subconjunto de Θ formado por los sistemas fuertemente inconsistentes
- Θ_{wi} : subconjunto de Θ formado por los sistemas débilmente inconsistentes
- Θ_∞ : subconjunto de Θ formado por los sistemas con distancia $+\infty$ a $bd(\Theta_c)$
- usc : semicontinua superiormente (en el sentido de Berge)
- $\mathfrak{U}(b)$: filtro de todos los entornos de b en la topología producto de \mathbb{R}^T
- v, v^d : valor óptimo de π y de π^d , respectivamente
- v^a : valor óptimo asintótico de π
- v^{da} : valor óptimo dual asintótico de π

$\vartheta : \Pi \longrightarrow [-\infty, +\infty]$: función valor óptimo

$\{x^{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(b)\}$: red correspondiente al filtro $\mathfrak{U}(b)$

X° : cono polar positivo (o cono dual) del conjunto convexo $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$

X^T : producto cartesiano (conjunto de todas las funciones de X en T)

X_∞ : cono asintótico del conjunto $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^k$

$\{z_r\}$ (o $\{z^r\}$) : sucesión de término general z_r (o z^r)

Z^- : envoltura convexa de $\{a_t, t \in T; -c\}$ (véase π)

Z^+ : envoltura convexa de $\{a_t, t \in T; c\}$ (véase π)



Índice alfabético

- caso continuo, 2
- conjunto
 - A , 21
 - C , 20
 - de índices, 15
 - de nivel inferior, 27
 - factible, 16
 - factible dual, 128
 - hipográfico, 38
 - óptimo, 18
 - óptimo dual, 128
 - Θ_∞ , 34
 - Z^+ , 67
 - Z^- , 64
- cono
 - asintótico, 23
 - característico, 20
 - de las relaciones consecuentes, 21
 - de recesión, 23
 - dual, 19
 - polar positivo, 19
 - primer cono de momentos, 20
 - segundo cono de momentos, 20
- consecuencia de un sistema, 21
- distancia
 - al mal planteamiento
 - en sentido generalizado, 38
 - en sentido ordinario, 29
 - extendida
 - en Π , 18
 - en Θ , 17
 - espacio paramétrico de los
 - problemas de PLSI, Π , 18
 - sistemas de PLSI, Θ , 16
 - función
 - valor óptimo, 125
 - (multi)función
 - conjunto factible, 99
 - funciones de coeficientes, 1
- hiperplano
 - separador, 21
 - soporte, 23
- interior
 - relativo, 15
- Lema de Farkas no homogéneo, 21

- mal planteamiento
 - generalizado, 37
 - ordinario, 30
 - respecto de la dual-consistencia, 130
 - respecto de la primal-dual consistencia, 135
 - respecto de la resolubilidad, 60
- mejor aproximación, 22
- problema
 - acotado, 18
 - asintóticamente dual-consistente, 138
 - consistente, 18
 - dual (en el sentido de Haar), 128
 - dual-consistente, 128
 - dual-inconsistente, 128
 - inconsistente, 18
 - resoluble, 18
- propiedad
 - cota de error local, 102
 - de Aubin, 102
 - de “calmness”, 102
 - de pseudo-lipschitzianidad, 102
 - de regularidad métrica, 102
- salto de dualidad, 128
- separación, 21
 - estricta, 21
 - fuerte, 21
 - propia, 21
- sistema
 - asintóticamente consistente, 137
 - consistente, 16
 - de restricciones, 15
 - débilmente inconsistente, 16
 - fuertemente inconsistente, 16
 - inconsistente, 16
 - lineal cónico, 29
 - mal planteado
 - en sentido generalizado, 30
 - en sentido ordinario, 30
 - normalizado, 114
 - reforzado, 23
- Slater
 - condición fuerte de Slater, 25
 - punto fuerte de Slater, 25
- solución
 - asintótica, 137
 - dual asintótica, 138
- topología
 - en Π , 18
 - en Θ , 17
- valor de consistencia, 51
- valor óptimo, 18
 - asintótico, 138
 - dual, 128
 - dual asintótico, 138